fasest | Université de Lille

**Sections 1, 2 et 3 - L2 Éco-Gestion**

## Examen MATHS 3 - Décembre 2024 - 2h

**Documents interdits - Calculatrices "type collège" autorisées**
**Les résultats doivent être justifiés. Le barème est indicatif.**

### Exercice 1 (4,5 points)

Donner la nature des séries suivantes et préciser leur somme lorsqu'elles convergent.

1) $\sum_{n\geq 0} 2^n \mathrm{e}^{-n}$ 2) $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{n^4+n^2}$ 3) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$

### Exercice 2 (3,5 points)

1) Vérifier que $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.

2) En déduire le calcul de $I = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

3) Calculer $J = \int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$ en utilisant une intégration par parties.

### Exercice 3 (2,5 points)

1) En posant $t = \mathrm{e}^x$, calculer $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$.

2) Calculer, grâce à la question précédente, $J = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$.

### Exercice 4 (6,5 points)

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + 2xy - 2x^2 - y^2$.

1) Calculer les dérivées partielles premières de $f$.

2) Montrer que $f$ admet deux points critiques : $X_1^*(0\,;0)$ et $X_2^*(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3})$.

3) En chaque point critique, déterminer s'il existe un extremum local. Si oui, préciser sa nature et sa valeur.

4) Calculer une valeur approchée à l'ordre 1 de $f(0{,}1\,;0{,}99)$.

5) Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = x+y$. Optimiser $f$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

### Exercice 5 (3 points)

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par $f(x,y) = x + 3y - 2\ln(y)$, et soit $g$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = xy$.

1) Déterminer la courbe de niveau $k = 1$ de $g$ et la représenter.

2) Minimiser $f$ sous la contrainte $g(x,y) = 1$.