

Maths 3 - Exercices - 2025/2026

1 Séries

⊛ **Exercice 1.** Déterminer la nature de chacune des séries suivantes. Si ce sont des séries géométriques convergentes, calculer leur somme.

1. $\sum (0,2)^n$;
2. $\sum (1,01)^n$;
3. $\sum \frac{7}{3^n}$;
4. $\sum (-1)^n$;
5. $\sum_{n>0} n^{-3}$;
6. $\sum_{n>0} \frac{1}{(\sqrt[5]{n})^2}$;
7. $\sum_{n>0} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$;
8. $\sum_{n>0} \frac{n^3 + 2n + 5}{n^6}$;
9. $\sum_{n>0} \frac{-2}{n^4}$;
10. $\sum \frac{2^n + 3^n}{5^n}$.

⊛ **Exercice 2.** Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{n-3}{n+4}$?

⊛ **Exercice 3.** On considère la série de terme général $u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ pour $n \geq 1$.

Vérifier que la série ne diverge pas grossièrement. Calculer $\sum_{k=1}^n u_k$. En déduire la nature de la série.

⊛ **Exercice 4.** Quelle est la nature de la série $\sum_{n>0} \frac{2n^2 + 1}{n^4}$?

⊛ **Exercice 5.** Quelle est la nature de la série $\sum_{n>0} \frac{3n+5}{n^2}$?

⊛ **Exercice 6.** On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2 + n}$ (pour $n \geq 1$).

1. Quelle est la nature de cette série ?

2. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k^2 + k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

3. En utilisant la question précédente, calculer $\sum_{k=1}^n u_k$.

4. En déduire la somme de la série $\sum u_n$.

⊛ **Exercice 7.** Donnez la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \frac{n!}{100^n}$, pour $n \geq 0$;

2. $v_n = \frac{n(n+1)}{3^n}$, pour $n \geq 0$;

3. $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, pour $n \geq 0$;

4. $b_n = \left(\frac{3n+2}{2n+5}\right)^n$, pour $n \geq 0$;

2 Intégrales

⊛ **Exercice 8.** Calculez les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 x^2 + 3x \, dx$

2. $\int_1^2 2x^3 - \frac{1}{x} \, dx$

3. $\int_1^2 \frac{x^2 + 5}{x^3} \, dx$

4. $\int_1^4 \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \, dx$

5. $\int_1^4 x \sqrt{x} \, dx$

6. $\int_1^8 x^2 \sqrt[3]{x} \, dx$

7. $\int_1^4 x e^{(x^2)} \, dx$

8. $\int_1^4 (x^2 + 2x) e^{(x^3+3x^2)} \, dx$

⊛ **Exercice 9.** Calculez les intégrales suivantes.

1. $\int_1^2 \frac{4x+4}{(x^2+2x+1)^3} \, dx$

2. $\int_1^2 \frac{3x+3}{\sqrt{(x^2+2x+1)^5}} \, dx$

3. $\int_0^1 x e^{x^2} e^{e^{x^2}} \, dx$

4. $\int_0^1 (x^3+1)e^{x^4+4x} \, dx$

⊛ **Exercice 10.** Calculez les intégrales suivantes.

1. $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$

2. $\int_1^3 \frac{x}{x+1} \, dx$

3. $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$

4. $\int_0^1 \frac{x}{e^x} \, dx$

⊛ **Exercice 11.** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 + 4x$.

1. Calculer V_m , la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0,2]$.

2. Déterminer $c \in [0,2]$ tel que $f(c) = V_m$.

3. Déterminer $b > 0$ tel que la valeur moyenne de f sur $[0,b]$ soit égale à 5.

⊛ **Exercice 12.** 1. Calculer $I = \int_0^1 \frac{2x^3}{x^2+4} \, dx$ à l'aide du changement de variable $u = x^2 + 4$.

2. Calculer $J = \int_0^1 2x \ln(x^2 + 4) \, dx$ en utilisant une intégration par parties.

⊗ **Exercice 13.** Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^3 x \sqrt{3-x} \, dx, \quad B = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} \, dx, \quad C = \int_0^{-1} (2x^2 + 1) e^{3x} \, dx.$$

3 Fonctions de deux variables

⊗ **Exercice 14.** Soit f définie par $f(x,y) = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 - xy^3$.
Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f au point $A = (1; 1)$.
En déduire une valeur approchée de f au point $B = (1.1; 1.1)$.

⊗ **Exercice 15.** Soit f définie par $f(x,y) = \ln(1 + x^2y^4)$.
Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f au point $A = (1; 1)$.
En déduire une valeur approchée de $f(B) - f(A)$ avec $B = (0.99; 1.02)$.

⊗ **Exercice 16.** Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes puis en déterminer les points critiques et leur nature.

- | | |
|--|---|
| 1. $f(x,y) = -y^2 + 4y - x^2 + 4x + 2$; | 2. $f(x,y) = x^2 + y^4 - 2y^2$; |
| 3. $f(x,y) = x^2 + e^{-y} + 2y$; | 4. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$; |
| 5. $f(x,y) = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 4$; | 6. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$; |
| 7. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y$; | 8. $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$; |
| 9. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$; | 10. $f(x,y) = y(x^2 + \ln(y^2))$; |
| 11. $f(x,y) = xe^y - 3yx^2$; | 12. $f(x,y) = e^x + e^y + e^{-x-y}$; |
| 13. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{x^2-y^2}$. | |

⊗ **Exercice 17.** Rechercher les extrémums de chacune des fonctions f suivantes sous la contrainte associée.

1. $f(x,y) = x^3 + 5y^3 + 2x^2y + xy^2 + xy + 4$ sous la contrainte $x + y - 1 = 0$;
2. $f(x,y) = x \sqrt[3]{y}$ sous la contrainte $x + 3y = 12$;
3. $f(x,y) = 50\sqrt{x} y^2$ sous la contrainte $x + y = 80000$;
4. $f(x,y) = xe^{-y}$ sous la contrainte $2x + y + 4 = 0$
5. $f(x,y) = x - 2y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$;
6. $f(x,y) = xy$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$;