Fascicule d’exercices

Maths 2

Licence 1 – FaSEST –

SeGilliard

Fiche révision 1 – Résolutions d'équations, d'inéquations

Résolution d'équations du type ax² + bx + c = 0 avec a, b, c réels non nuls.

On calcule le discriminant Δ = b² - 4ac et on examine son signe.

Si Δ › 0 alors l'équation admet 2 racines distinctes données par les formules suivantes

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Remarque : on peut factoriser ax² + bx + c = a(x - $x_1)(x - x_2)$

Autre remarque : **le produit des racines vaut c/a, la somme des racines vaut -b/a.**

Donc **astuce** : si l'on connait une racine évidente x_1 (que l'on cherche parmi les valeurs 1, -1, 2, -2) on peut trouver l'autre facilement car $x_1 x_2$ = c/a.

Si Δ = 0 alors l'équation admet une racine unique donnée par la formule

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

Remarque : on peut factoriser ax² + bx + c = a(x - x_1)²

Si Δ ‹ 0 alors l'équation n'admet pas de racines réelles.

Détermination du signe de l'expression ax² + bx + c en fonction des valeurs de x.

On calcule le discriminant Δ = b² - 4ac et on examine son signe.

Si Δ › 0 alors l'équation admet 2 racines distinctes données par les formules suivantes

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

On a le tableau de signes suivant

x		x_1		x_2	
Signe de ax² +bx +c	signe de a	0	signe de – a	0	signe de a

Si Δ ≤ 0 alors l'expression ax² + bx + c, est toujours du signe de a.

Résolution des équations du 3ème degré

Il s'agit de résoudre une équation du type ax^3+ bx²+ cx+ d = 0.

Nous ne savons résoudre des équations du 3ème degré que dans le cas où nous connaissons une racine évidente. Alors on se ramène au produit d'un facteur du 1er degré par un facteur du 2nd degré.

Dans ce cas on dispose de deux méthodes : par identification ou par division euclidienne.

Méthode par identification : sur un exemple type

Résoudre $x^3 - 7x + 6 = 0$. On constate que x = 1 est une racine évidente.

On cherche des constantes a, b, c telles que $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(ax^2+bx+c)$

On développe le membre de droite, on obtient $x^3 - 7x + 6 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ et on identifie les coefficients des termes de même degré.

Ainsi on obtient le système $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = -7 \\ -c = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = a = 1 \\ c = -6 \end{cases}$

On a donc $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2+x-6)$

On peut donc résoudre l'équation de départ qui équivaut à x-1 = 0 ou x²+x-6=0

Suites arithmétiques

Définition : $U_{n+1} = U_n + r$ où r est la raison

Expressions de U_n en fonction de n : $U_n = U_0 + nr \ ou \ U_n = U_1 + (n-1)r \ \ ou \ \ U_n = U_p + (n-p)r$

Sens de variation : si r > 0 la suite est croissante, si r < 0 la suite est décroissante, si r = 0 la suite est constante.

Somme des premiers termes :

S = $U_p + \cdots + U_n = (n-p+1)\frac{U_p+U_n}{2}$

Limite : si $U_0 > 0$, si r > 0 $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ et si $U_0 > 0$, si r < 0 $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

Suites géométriques

Définition : $V_{n+1} = V_n \times q$ où q est la raison

Expressions de V_n en fonction de n : $V_n = V_0 q^n \ ou \ V_n = V_1 q^{n-1} \ ou \ \ V_n = V_p q^{n-p}$

Sens de variation : si $V_0 > 0 \ et \ si \ 0 < q < 1$ alors la suite est décroissante.

si $V_0 > 0 \ et \ si \ q > 1$ alors la suite est croissante.

Les résultats sont inversés si $V_0 < 0$.

Somme des premiers termes : S = $V_p + \cdots + V_n = V_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Limite : $si \ 0 < q < 1, \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

$si \ q > 1, si \ V_0 > 0 \ , \lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty, si \ V_0 < 0 \ , \lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$

Fiche révision 3 – ln et exp -

Fonction exp : x→ e^x

Ensemble de définition : IR

Dérivée et sens de variation : $(e^x)' = e^x$ > 0 donc la fonction est strictement croissante

$e^0 = 1$ $e^1 = e \approx 2.7$

$e^{a+b} = e^a \times e^b$ $(e^a)^n = e^{an}$ $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

exp : x→ e^u, où u est une fonction

Ensemble de définition : c'est l'ensemble de définition de u

Dérivée et sens de variation : $(e^u)' = u'e^u$ du signe de u'

Fonction ln : x→ lnx

Ensemble de définition :]0 ;+∞[et $e^{lnx} = x$ et $\ln(e^x) = x$

Dérivée et sens de variation : (lnx)' = $\frac{1}{x}$ > 0 donc ln est strictement croissante.

$ln1 = 0$ $lne = 1$

Propriétés : pour a et b > 0

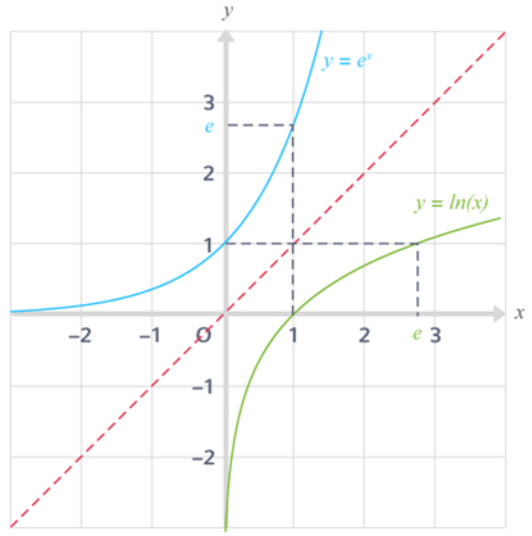
Ln(ab) = lna + lnb ln$(a^p) = plna$ $ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$

ln : x→ $\ln(u)$, où u est une fonction

Ensemble de définition : définie si u > 0

Dérivée et sens de variation : (lnu)' = $\frac{u'}{u}$ du signe de u'.

Les fonctions ln et exp sont inverses l'une de l'autre



Chapitre Suites – Maths 2

Exercice Su.1

Soit une suite (U_n) de premier terme U_0. Quel est le rang du 15ème terme ?

Exercice Su.2

1) Soit (U_n) une suite définie par $U_n = n^2 - 2n + 3$. Calculer U_0, U_5

2) Soit (U_n) une suite définie par $\mathrm{U}_{\mathrm{n}+1} = \frac{\mathrm{U_n}}{1+\mathrm{U_n}}$ $et\ U_0 = 1$. Calculer U_1.

3) Soit (U_n) une suite définie par $\begin{cases} U_0 = 1, U_1 = -1 \\ U_{n+2} = 2U_{n+1} + U_n \end{cases}$. Calculer U_2, U_4

Exercice Su.3

1) Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$, de raison r = -1. Calculer U_5.
2) Soit (U_n) une suite arithmétique telle que $U_4 = 7\ et\ U_{12} = 23$. Déterminer la raison r et le premier terme U_0.
3) Soit (V_n) une suite géométrique de premier terme $V_1 = 16$, de raison q = $\frac{1}{2}$. Calculer V_5.
4) Soit (V_n) une suite géométrique telle que $V_4 = 5\ et\ V_{10} = 3645$. Déterminer la raison q et le premier terme V_0.

Exercice Su.4

1) Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$, de raison r = -1.

Calculer S = $\sum_{k=0}^{k=10} U_k$.

2) Soit (V_n) une suite géométrique de premier terme $V_1 = 16$, de raison q = $\frac{1}{2}$.

Calculer S = $\sum_{k=5}^{k=15} V_k$.

3) Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$, de raison r = 1.

Déterminer n tel que S = $\sum_{k=0}^{k=n} U_k = 1377$.

4) En reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique, calculer la somme suivante

S = $\frac{1}{3} + 1 + 3 + \cdots + 19683$

Exercice Su.5

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \frac{3n^2}{n^2+1}$.

1) Montrer que la suite est majorée par 3.
2) Montrer que la suite est croissante.
3) En utilisant un théorème du cours, montrer que la suite est convergente.

Exercice Su.6

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = 1 + \frac{2n}{n+1}$.

1) Montrer que pour tout n$\in IN$, $0\leq U_n \leq 3$.
2) Montrer que la suite est croissante.
3) Etudier la convergence de la suite.

Exercice Su.7

Soit (U_n) une suite définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2U_n - 1 \end{cases}$

Déterminer l'expression de U_n en fonction de n (en utilisant la méthode d'étude des suites A.G).
Etudier la convergence de la suite.

Exercice Su.8

Soit (U_n) une suite définie par $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}U_n \end{cases}$.

Méthode 1

1) Démontrer, par récurrence sur n, que la suite est majorée par 2.
2) Démontrer, par récurrence sur n, que la suite est croissante.
3) Déduire que la suite est convergente.

Méthode 2

Etudier la suite avec la méthode d'étude d'une suite arithmético-géométrique et retrouver le résultat précédent.

Exercice Su.9

Soit (U_n) une suite définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \text{ } et \text{ } U_1 = 0 \\ U_{n+2} = -U_{n+1} + 2U_n \end{cases}$.

Déterminer l'expression de U_n (en utilisant la méthode d'étude des suites linéaires récurrentes d'ordre 2).

Exercice Su.10

Soit (U_n) une suite définie par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n} \end{cases}$.

1) Calculer U_1, U_2
2) Démontrer par récurrence que $U_n > 0$
3) Démontrer par récurrence que $U_n \leq 1$ (on étudiera d'abord la fonction sous-jacente et on montrera qu'elle est croissante sur IR+)
4) Démontrer par récurrence que la suite est croissante.
5) On introduit maintenant la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{U_n}{1-U_n}$
   a) Montrer que (V_n) est une SG de raison q = 3
   b) Exprimer V_n en fonction de n.

c) En déduire U_n en fonction de n puis la limite de la suite (U_n)

Exercice Su.11

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ et (V_n) la suite définie par V_n=$U_n + \frac{1}{n(n!)}$

Montrer que les suites sont adjacentes. En déduire leur convergence.

<u>**Chapitre Fonctions – Maths 2**</u>

(Les exercices 1, 2, 4, 5 sont moins indispensables)

<u>Exercice Fo.1</u>

1) Calculer l'image de 0 puis de (-1) par la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 1$. Calculer le ou les antécédents éventuels de (-1) puis de 9 par f.
2) Calculer l'image de 0 puis de (-3) par la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$. Calculer le ou les antécédents éventuels de 0, de 1 puis de 2 par f.

<u>Exercice Fo.2</u>

Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}$.

Préciser l'ensemble de définition de f puis déterminer, s'ils existent, les antécédents de 0, de 1, de -1 par f.

<u>Exercice Fo.3</u>

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes

$f(x) = \frac{2x^2+1}{4x-6}$	$f(x) = \sqrt{4x-6}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-6}}$
$f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$	$f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$	$f(x) = \ln(5-x)$
$f(x) = \ln(\sqrt{x^2+x-2})$	$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+4}\right)$	$f(x) = e^{1/x^2}$
$f(x) = \frac{1}{e^x-2}$	$f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$	$f(x) = \frac{1}{\ln(x^2+x+1)}$

<u>Exercice Fo.4</u>

1) Démontrer que la fonction $(x-3)^2$ est croissante sur [3 ;+∞[(on utilisera la définition)
2) Démontrer que la fonction $\frac{1}{x-1}$ est décroissante sur]1 ;+∞[.
3) Déterminer le sens de variation de la fonction $x^2 - 1$ sur [0 ;+∞[

<u>Exercice Fo.5</u>

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f, de g, écrire $f \circ g$ puis $g \circ f$ (et donner leurs ensembles de définition)

1) f définie par $f(x) = 2x+3$ et g par $g(x) = 4x - 5$
2) f définie par $f(x) = 2x+3$ et g par $g(x) = x^2$
3) f définie par $f(x) = \frac{2}{x-1}$ et g par $g(x) = x^2$
4) f définie par $f(x) = \frac{2}{x-1}$ et g par $g(x) = \sqrt{x}$

Exercice Fo.6

La fonction f est définie sur IR^+ et vérifie f(3) < f(5). Pour chacune des affirmations, dire si elle est vraie, fausse ou indécidable.

1) f est croissante sur IR^+
2) f est strictement croissante sur [3 ;5]
3) f n'est pas décroissante sur IR^+.

Exercice Fo.7

Déterminer, dans chaque cas, la limite de la fonction en a (on précisera l'ensemble de définition). Préciser les asymptotes éventuelles.

1) f(x) = $\frac{-3}{x-1}$ en a = 1 et a = +∞

2) f(x) = $\frac{x+1}{x^2+x-6}$ en a = 2 et en a = -∞

3) f(x) = $\frac{x^2+x+1}{x^2-4}$ en a = -2 et en a = +∞

4) f(x) = $\frac{2x-6}{x^2-2x-3}$ en a = 3, en a = -1 et en a = -∞

5) f(x) = $\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ en a = 5 et en a = +∞

6) f(x) = $\frac{1}{x}(\sqrt{x^2+x+1}-1)$ en a = 0 et en a = +∞

Exercice Fo.6

Déterminer la limite de chaque fonction en a.

1) f(x) = xe^{-x} en a = -∞ et en a = +∞
2) f(x) = x^2 lnx en a = 0 et en a = +∞
3) f(x) = lnx – x^2 + x +1 en a = 0 et en a = +∞

4) f(x) = $\frac{e^x}{x\ln x}$ en a = 0 et en a = +∞

5) f(x) = $\frac{e^x-x}{e^x+x}$ en a = +∞ et en a = -∞

6) f(x) = $\frac{x+2}{x^2\ln x}$ en a = 0^+ et en a = +∞

Exercice Fo.7

Soit f définie par f(x) = $\frac{x^2-3x-2}{x-4}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

2) Montrer qu'il existe des réels a,b et c telles que f(x) = ax + b + $\frac{c}{x-4}$
3) Montrer qu'il existe une asymptote oblique à la courbe et donner sa position par rapport à la courbe.

Exercice Fo.8

1) Etudier la continuité de la fonction f sur IR^+.

$$\begin{cases} f(x) = x+2 \ \ sur\ [0;9[\\ f(x) = \sqrt{x}+8 \ \ sur\ [9;+\infty[\end{cases}$$

2) Même question pour la fonction g sur IR^+.

$$\begin{cases} g(x) = -x+1 \ \ sur\ [0;1[\\ g(x) = 2x^2-1 \ \ sur\ [1;+\infty[\end{cases}$$

3) Déterminer a pour que la fonction h soit continue sur IR.

$$\begin{cases} h(x) = (x+a)^2\ si\ x \leq 1 \\ h(x) = 4\sqrt{x}-x+1 \ \ si\ x > 1 \end{cases}$$

Exercice Fo.9

Soit f définie par f(x) = $\frac{\sqrt{x-2}-2}{(x-6)}$

Donner l'ensemble de définition de f puis montrer que f est prolongeable par continuité en 6.

Exercice Fo.10

Etudier la dérivabilité de la fonction f sur IR^+.

$$\begin{cases} f(x) = -x+1 \ \ sur\ [0;1[\\ f(x) = x^2-1 \ \ sur\ [1;+\infty[\end{cases}$$

Exercice Fo.11

1) Trouver a et b tels que f soit dérivable sur IR^+.

$$\begin{cases} f(x) = x+2 \ \ sur\ [0;2[\\ f(x) = ax^2+bx \ \ sur\ [2;+\infty[\end{cases}$$

2) Trouver a et b tels que f soit dérivable sur IR^+.

$$\begin{cases} f(x) = 5x+6 \ \ si\ x \geq 0 \\ f(x) = x^2+ax+b \ \ si\ x < 0 \end{cases}$$

Exercice Fo.12

Calculer les dérivées des fonctions suivantes et dresser le tableau de variations de f (on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f).

f(x) = $\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$- 2x	f(x) = $\frac{x+3}{x-1}$	f(x) = $\frac{x^2-2x}{x-3}$

f(x) = xlnx	f(x) = (x+1)e^x	f(x) = $\frac{e^x}{x}$
f(x) = $\frac{lnx}{x}$	f(x) = ln(x+1) + x	f(x) = $e^{x+1} - x$

Exercice Fo.13

Soit f définie par f(x) = $x^3 + x - 1$

Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution dans]-1 ;1[.

Exercice Fo.14

La fonction est définie sur [1 ;7] et est strictement croissante sur cet intervalle, f(1) = 4 et f(7) = 8.

Pour chacune des affirmations, dire si elle est vraie, fausse ou indécidable.

1) L'équation f(x) = 6 admet une solution.
2) L'équation f(x) = 6 admet au plus une solution.
3) L'équation f(x) = 6 admet au moins une solution.
4) L'équation f(x) = 9 admet au moins une solution.

Exercice Fo.15

Point méthode :

On utilise, entre autre, le théorème
Une fonction f continue sur un intervalle [a ;b] (à valeurs réelles) et strictement monotone sur [a ;b] constitue une bijection entre [a ;b] et [f(a) ; f(b)]. Elle admet une fonction réciproque, notée f^{-1}, définie sur [f(a) ; f(b)] qui vérifie $\mathbf{f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id}$.

Puis la méthode : pour déterminer la fonction réciproque on résout y = f(x), on exprime x en fonction de y.

Soit f définie par f(x) = $\frac{x+2}{x-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
3) Montrer que f est décroissante sur son ensemble de définition.
4) Montrer que f réalise une bijection de]1 ;+∞[sur un intervalle J à préciser.
5) Déterminer l'application réciproque.

Exercice Fo.16

Soit f définie par f(x) = $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1) Déterminer l'ensemble de définition I de f
2) Etudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
3) Etudier les variations de f sur son ensemble de définition.
4) Résoudre f(x) = 0
5) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

6) Déterminer l'application réciproque.

Exercice Fo.17

Soit f définie par f(x) = $(x^2 - 1)e^{2x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
2) Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variations de f.
3) Résoudre f(x) = 0.
4) Etudier la convexité de f.
5) Déterminer la tangente à la courbe en 0.

Chapitre Fonctions de 2 variables – Maths 2

Exercice 2va.1

Pour chaque fonction déterminer le domaine de définition et le représenter. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 (préciser l'ensemble où f est dérivable)

1) f(x,y) = x^4 + $5y^3$+ $2x^2y$+ xy^2+ xy+ 4
2) f(x,y) = xe^{3y+2}
3) f(x,y) = ln(1-xy)
4) f(x,y) = xlny + ylnx²
5) f(x,y) = $\frac{\ln(x^2+y^2)}{x+y}$
6) f(x,y) = $x^y + y^x$

Exercice 2va.2

Soit f définie par f(x,y) = $\frac{2x+3y}{x+y}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Déterminer la courbe de niveau 4 de f.
3) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
4) Ecrire le développement limité d'ordre 1 de f en A(1 ;1)
5) Déterminer une valeur approchée de f en (0,9 ;1,1)

Exercice 2va.3

Soit f définie par f(x,y) = $\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Déterminer la courbe de niveau k de f. (discuter les cas)
3) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
4) Ecrire le développement limité d'ordre 1 de f en A(1 ;1)

Déterminer une valeur approchée de f en (0,9 ;1,1)

Exercice 2va.4

Rechercher les extremums de chacune des fonctions f suivantes sous la contrainte associée

1) f(x,y) = $x^3 + 5y^3 + 2x^2y + xy^2 + xy + 4$ sous la contrainte x+ y – 1 = 0
2) f(x,y) = x$\sqrt[3]{y}$ sous la contrainte x + 3y = 12
3) f(x,y) = 50$\sqrt{x}y^2$ sous la contrainte x + y = 80 000
4) f(x,y) = xe^{-y} sous la contrainte 2x + y + 4 = 0

Exercice 2va.5

Rechercher les extremums de chacune des fonctions f suivantes sous la contrainte associée, à l'aide de la méthode de Lagrange.

1) $f(x,y) = xy$ sous contrainte $g(x,y) = x - e^{y} = 0$
2) $f(x,y) = x - 2y$ sous contrainte $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$
3) $f(x,y) = x^2 - 3y^2$ sous contrainte $g(x,y) = x + 2y - 1 = 0$

Exercice 2va.6

Rechercher les extremums éventuels des fonctions suivantes

1) $f(x,y) = 2y^3 - x^3 + 147x - 54y + 12$
2) $f(x,y) = 3x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 7y + 12$
3) $f(x,y) = 3x^3 - 5y^2 - 225x + 70y + 23$
4) $f(x,y) = 60x + 34y - 4xy - 6x^2 - 3y^2 + 5$
5) $f(x,y) = 3x^3 - 9xy + 3y^3$