

<p align="center">Examen – Outils Mathématiques – Décembre 2025 Sections 1 et 3 – FaSEST – Durée 2h</p>

Les documents sont interdits. Seules les calculatrices de type collège sont autorisées.

Le sujet comporte **3 exercices**. Aucun brouillon ne sera corrigé. Les résultats doivent être **justifiés**.

Exercice 1 (7 points)

Le 1^{er} septembre 2025, une composante d'Université contient 3000 étudiants. Une étude statistique montre que chaque 1^{er} septembre 20% de l'effectif quitte l'Université mais 200 nouveaux étudiants s'inscrivent.

On modélise cette situation par une suite (U_n) , où pour tout entier naturel n , U_n représente le nombre d'étudiants dans la composante le 1^{er} septembre de l'année 2025+n.

- 1) Justifier que $U_{n+1} = 0.8U_n + 200$.
- 2) Donner l'expression de U_n en fonction de n . (**Détailler la méthode**)
- 3) Combien y-aura-t-il d'étudiants le 1^{er} septembre 2028 ?
- 4) A cause de restrictions de budget, la composante envisage de fusionner avec une autre si le nombre d'étudiants descend en dessous de 1500 au fil des années. La fusion risque-t-elle de se produire ? (**Justifier**)
- 5) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que $U_n = 2000 \times 0.8^n + 1000$, pour tout n entier naturel (on retrouvera ainsi le résultat du 2)).

Exercice 2 (6 points)

Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \ln(-x+10)$ et $g(x) = \ln(x^2-x-6)$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Déterminer l'ensemble de définition de g .
- 3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Interpréter géométriquement.
- 4) Les courbes représentatives de f et g ont-elles des points d'intersection ? Expliquer.

Exercice 3 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[-2 ; 5]$ par $f(x) = (x-2)e^x$.

- 1) Démontrer que $f'(x) = (x-1)e^x$. (Détailler)
- 2) Dresser le tableau de variations de f .
- 3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et discuter le signe de f .
- 4) Déterminer une équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de f .
- 5) Discuter la convexité de f . (Justifier)