Remarques de Q.K. Ayant retapé rapidement cet énoncé et ce corrigé, les typos sont de moi... La correction est peu détaillée, on en écrirait davantage au tableau.

Exercice 1

Dans cet exercice, toutes les suites sont arithmétiques de raison r

1. On a $u_0 = 2$ et $r = 4.5$. Déterminer u_{193}
2. On a $v_{17} = 17.4$ et $v_{48} = 54,6$. Déterminer v_0 et r.
3. On a $w_0 = 2$ et $r = 3$. Déterminer $S = \sum_{k=0}^{98} w_k$.
4. On a $a_0 = 1$ et $r = 1,4$. Déterminer n tel que $\sum_{k=0}^{n} a_k = 1\ 495$.
5. On a $b_0 = 2$ et $r = 0,5$. Déterminer $T = \sum_{k=1000}^{1012} b_k$.

Correction

1. $u_{193} = u_0 + 193r = 2 + 193 \times 4,5 = 870,5$
2. $v_{48} - v_{17} = (48-17)r = 31r, v_{48} - v_{17} = 54,6 - 17,4 = 37,2$. $31r = 37,2$ donc $r = \dfrac{37,2}{31} = 1,2$.
   $v_0 = v_{17} - 17r = 17,4 - 17 \times 1,2 = -3$.
3. $w_{98} = 2 + 98 \times 3 = 296; S = (98+1) \times \dfrac{2+296}{2} = 14\ 751$
4. $\sum_{k=0}^{n} a_k = (n+1)\dfrac{a_0 + a_n}{2} = (n+1)\dfrac{1}{2}(a_0 + a_0 + n \times r) = (n+1)(a_0 + \dfrac{r}{2}n) = (n+1)(1 + 0,7n)$.
   $(n+1)(1+0,7n) = 0,7n^2 + 1,7n + 1$.
   $0,7n^2 + 1,7n + 1 = 1\ 495 \Leftrightarrow 0.7n^2 + 1,7n - 1\ 494 = 0$.
   $\Delta = 1,7n^2 64(0,7)(-1\ 494) = 4\ 186,09 = 64,7^2$
   $n_1 = \dfrac{-1,7 - 64,7}{2 \times 0,7} < 0$ qui ne peut être solution.
   $n_2 = \dfrac{-1,7 + 64,7}{2 \times 0,7} = 45$.
   La solution est n_2
5. $T = \sum_{k=1000}^{1012} b_k = (1012 - 1000 + 1)\dfrac{b_{1000} + b_{1012}}{2}$.
   $b_{1\ 000} = b_0 + 1000r = 2 + 1000 \times 0,5 = 502$. $b_{1\ 012} = b_0 + 1012r = 2 + 1012 \times 0,5 = 508$.
   $T = 13 \times \dfrac{502 + 508}{2} = 13 \times 505 = 6\ 565$.

Exercice 2

Dans cet exercice toutes les suites sont géométriques de raison q.

1. $u_0 = 2$ et $q = 3$, déterminer u_8.
2. $v_0 = 32\ 768$ et $q = 0,5$ déterminer $S = \sum_{k=0}^{10} v_k$.

Correction

1. $u_8 = u_0 \times q^8 = 2 \times 3^8 = 13\ 122$.
2. $S = \sum_{k=0}^{10} v_k = \sum_{k=0}^{10} v_0 q^k = v_0 \sum_{k=0}^{10} q^k = v_0 \dfrac{1 - q^{10+1}}{1-q} = 32\ 768 \dfrac{1 - 0,5^{11}}{1 - 0,5} = 65\ 504$.

Exercice 3

Dans ce qui suit, f est une fonction réelle de la variable réelle. Déterminez, dans chaque cas, son ensemble de définition.

1. $f(x) = \dfrac{x+3}{2x^2 - 8}$
2. $f(x) = \sqrt{x+1}$
3. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x-3}}$

Correction

1. f est une fonction rationnelle, elle est définie si et seulement si son dénominateur n'est pas nul.
   $2x^2 - 8 = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)(x+2) = 0$
   $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$
2. f est définie si et seulement si $x + 1 \geq 0$
   $x + 1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -1 : \mathcal{D}_f = [-1; +\infty[$.
3. f est définie si et seulement si $x - 3 > 0$
   $x - 3 > 0 \Longleftrightarrow x > 3 : \mathcal{D}_f =]3; +\infty[$.

Exercice 4

Soient f et g les fonctions définies par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2 + 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3$.

Correction

Déterminez $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.
$f \circ g(x) = f(g(x)) = [g(x)]^2 + 1 = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$.
$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2[f(x)] - 3 = 2(x^2 + 1) - 3 = 2x^2 - 1$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f :]2; +\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4}$.
Démontrez, sans utiliser la dérivée, que f est strictement décroissante sur $]2; +\infty[$.

Correction

$2 < a < b \Rightarrow 4 < a^2 < b^2 \Rightarrow 0 < a^2 - 4 < b^2 - 4 \Rightarrow \dfrac{1}{a^2 - 4} > \dfrac{1}{b^2 - 4} \Rightarrow f(a) > f(b)$
Donc f est strictement décroissante sur $]2; +\infty[$.

Exercice 6

On dit qu'une suite (u_n) vérifie **E** si, et seulement si, on a $u_{n+1} = 2u_n + 6$ pour tout entier n.

1. Déterminez la suite constante (k) vérifiant **E**.
2. Soit u_n une suite vérifiant **E**, on définit la suite (v_n) par $v_n = u_n + 6$ pour tout entier n. Démontrez que (v_n) est une suite géométrique dont vous déterminerez la raison.

Correction

1. $k = 2k + 6 \Leftrightarrow k = -6$.
2. $v_n = u_n + 6 \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = (2u_n + 6) + 6 = 2u_n + 12 = 2(u_n + 6) = 2v_n$.
   (v_n) est géométrique de raison 2.