LISI Visio du 4/11 16h45

suite arithmétique

Exercice 3.1

Point méthode : si la différence entre 2 termes consécutifs est constante, c'est une SA ; si le quotient de deux termes consécutifs est constant, c'est une SG.

suite géo.

1) 6, 10, 14 peuvent-ils être les 3 premiers termes d'une suite arithmétique ? Justifier
2) 5, 25, 120 peuvent-ils être les 3 premiers termes d'une suite géométrique ? Justifier

1) 6 → 10 → 14 (+4, +4)

De 6 à 10, on ajoute 4, comme de 10 à 14.
Ces 3 termes peuvent être les 3 premiers termes d'une suite arithmétique.

2) 5 → 25 → 120 (×5)

Ici $25 \times 5 = 125 \neq 120$
Ces termes ne sont pas les premiers termes d'une suite géométrique.

Exercice 3.2 Suites arithmétiques

Point méthode : on utilise les formules suivantes

$U_n = U_0 + nr$.

$U_n = U_1 + (n-1)r$ si le premier terme est U_1.
De manière plus générale $U_n = U_p + (n-p)r$

On suppose que $(U_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique

1) On sait que $U_0 = 2$ et $r = -3$. Calculer U_{10}, U_{20}.
2) On sait que $U_0 = 2$ et $U_2 = 10$. Calculer r, U_1, U_5.
3) On sait que $U_{20} = -52$ et $U_{51} = -145$. Expliciter U_n.
4) On sait que $U_{22} = 15$ et $r = 3/4$. Expliciter U_n.

1. $u_{10} = u_0 + 10r$

$u_{10} = 2 + 10\times(-3) = -28$.

$u_{20} = u_0 + 20r$

$u_{20} = 2 + 20\times(-3) = -58$.

2. $u_2 = u_0 + 2r$

$10 = 2 + 2r \iff 2r = 8$

$\iff r = 4$.

$u_1 = u_0 + r = 2 + 4 = 6$

$u_5 = u_0 + 5r = 2 + 4\times5 = 22$

3. $u_{51} = u_{20} + (51-20)r \iff -145 = -52 + 31r \iff 31r = 52 - 145$

$\iff 31r = -93 \iff r = -\frac{93}{31} = -3$.

$u_n = u_{20} + (n-20)\times(-3) = -52 - 3n + 60 = 8 - 3n$ $\quad (u_0 = 8 \dots)$

4. $u_{22} = u_0 + 22r \Rightarrow 15 = u_0 + \frac{3}{4}\times22 \Rightarrow u_0 = 15 - \frac{33}{2} = -\frac{3}{2}$.

$u_n = -\frac{3}{2} + \frac{3}{4}n$

Exercice 3.3 Suites géométriques

Point méthode : on utilise les formules suivantes

$V_n = q^n \times V_0$

$V_n = q^{n-1} \times V_1$

$V_n = q^{n-p} \times V_p$

On suppose que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique

1) On sait que $V_0 = 32$ et $q = 1/4$. Calculer V_2, V_8.
2) On sait que $V_0 = 3$ et $V_2 = 12$. Calculer q, V_1, V_5.
3) On sait que $V_3 = 243$ et $V_6 = 9$. Expliciter V_n.
4) On sait que $V_1 = -1$ et $V_{10} = 1$. Expliciter V_n.

1. $v_2 = v_0 q^2 = 32 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{32}{16} = 2$

$v_8 = v_0 q^8 = 32 \times \left(\frac{1}{4}\right)^8 = \frac{32}{4^8} = \frac{32}{(2^2)^8} = \frac{2^5}{2^{16}}$

$v_8 = \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2048}$

2. $v_2 = v_0 q^2 \iff 12 = 3q^2$

$\iff q^2 = 4 \iff q = 2$ ou $q = -2$

Si $q = 2$, $v_1 = v_0 q = 3 \times 2 = 6$

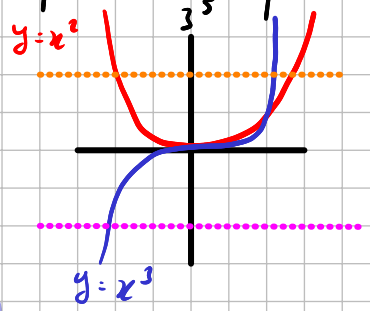
$v_5 = v_0 q^5 = 3 \times 2^5 = 96$

Si $q = -2$, $v_1 = v_0 q = 3 \times (-2) = -6$

$v_5 = v_0 q^5 = 3 \times (-2)^5 = -96$

3. $v_6 = v_3 q^3 \iff 9 = 243 q^3 \iff 3^2 = 3^5 q^3 \iff \frac{3^2}{3^5} = q^3$

$\iff q^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \iff q = \frac{1}{3}$



$v_n = v_6 q^{n-6} = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-6} = \frac{9}{3^6} \frac{1}{3^n}$

$v_n = 3^{2+6} \times \frac{1}{3^n} = \frac{3^8}{3^n} = 3^{8-n} = 3^8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

4. $v_{10} = v_1 q^9 \iff 1 = -1 \times q^9 \iff q^9 = -1 \iff q = -1$

$v_n = v_1 q^{n-1} = -1 \times (-1)^{n-1} = (-1)^n$.

Exercice 3.4 **(facultatif)**

Albert place un capital initial C_0 = 3000€ à un taux annuel de 6%, les intérêts étant simples, c'est-à-dire que le capital d'une année est égal à celui de l'année précédente augmenté de 6% du capital initial (les intérêts ne sont pas capitalisés chaque année, contrairement aux intérêts composés).

On note C_n le capital d'Albert au bout de n années, capital exprimé en euros.

1) Montrer que pour tout entier n, $C_{n+1} = C_n + 180$. Qu'en déduit-on ?
2) Pour tout entier n, exprimer C_n en fonction de n.
3) De quel capital Albert dispose-t-il au bout de 10 ans ?
4) Au bout de combien d'années le capital a-t-il doublé ?
5) Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il 10 000€ ?

1) D'une année à l'autre le capital augmente de 6% du capital initial

D'une année à l'autre le capital augmente de 6% de 3000 = 0,06 × 3000
= 30 × 6 = 180 €

$C_{n+1} - C_n = 180 \iff C_{n+1} = C_n + 180$

2) $C_n = C_0 + n \times 180 = 3000 + 180n$

3) $C_{10} = 3000 + 180 \times 10 = 4800$ €. Le capital après 10 ans s'élève à 4800 €

4) Le capital "double" lorsqu'il dépasse $2 \times C_0 = 2 \times 3000 = 6000$ pour la 1ère fois.

On résout $C_n \geq 6000 \iff 3000 + 180n \geq 6000 \iff 180n \geq 3000$

$\iff n \geq \frac{3000}{180} = \frac{300}{18} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3} \simeq 16,7$

Il faut 17 ans pour que le capital double.

5) On résout $C_n \geq 10000 \iff 3000 + 180n \geq 10000$

$\iff 180n \geq 7000 \iff n \geq \frac{7000}{180} = \frac{350}{9} \simeq 38,9.$

Il faut 39 ans pour dépasser 10 000 €.

Exercice 3.5 **(facultatif)**

géométrique

On suppose que chaque année la production d'une usine subit une baisse de 4%. Au cours de l'année 2000, la production a été de 25 000 unités. On note $P_0 = 25\,000$ et P_n la production prévue au cours de l'année 2000+n.

1) Déterminer la nature de la suite. Préciser ses paramètres.
2) Si la production descend en dessous de 15 000 unités, l'usine sera en faillite. Quand cela se produira-t-il si la baisse persiste ?

1. D'une année à l'autre la prod. baisse de 4 % $t = -4\% \Leftrightarrow C_M = 0{,}96$

D'une année à l'autre la prod. est multipliée par 0,96

$P_{n+1} = P_n \times 0{,}96 \Leftrightarrow P_{n+1} = 0{,}96\, P_n$

(P_n) géométrique avec $P_0 = 25\,000$ et $q = 0{,}96$.

2. $P_0 = 25000$

$P_1 = 25000 \times 0{,}96 = 24000$

...

$P_{12} = 15317$

$P_{13} = 14705$

Il faut 13 ans.

$P_{12} = 25000 \times 0{,}96^{12} \simeq 15317$

$P_{13} = 25000 \times 0{,}96^{13} \simeq 14705$

Il faut 13 ans

On résout $P_n \leq 15000$

$\Leftrightarrow 25000 \times 0{,}96^n \leq 15000$

$\Leftrightarrow 0{,}96^n \leq \frac{15000}{25000} = \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}96^n) \leq \ln\left(\frac{3}{5}\right)$ ln ↗

$\Leftrightarrow n \ln(0{,}96) \leq \ln\left(\frac{3}{5}\right)$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(3/5)}{\ln(0{,}96)} \simeq 12{,}51$

Il faut 13 ans