L1S1 Vidéo du 4/11

Chapitre 3 : suites

15h

Exercice 3.1

suite arithmétique

Point méthode : si la différence entre 2 termes consécutifs est constante, c'est une SA ; si le quotient de deux termes consécutifs est constant, c'est une SG.

1) 6, 10, 14 peuvent-ils être les 3 premiers termes d'une suite arithmétique ? Justifier
2) 5, 25, 120 peuvent-ils être les 3 premiers termes d'une suite géométrique ? Justifier

1) 6 → 10 → 14 (+4, +4). Les écarts sont constants (= 4), ces 3 termes peuvent être les 3 premiers termes d'une S.A.

2) 5 → 25 → 120 (×5, ×5)

$\frac{25}{5} = 5$ mais $25 \times 5 = 125 \neq 120$

Ce ne sont pas 3 termes consécutifs d'une suite géo.

Rq Calculer 3 termes consécutifs permet de prouver qu'une suite n'est pas Arith. ou géo. mais pas de prouver qu'elle l'est !

Exercice 3.2

Point méthode : on utilise les formules suivantes

$U_n = U_0 + nr$.

$U_n = U_1 + (n-1)r$ si le premier terme est U_1.

De manière plus générale $U_n = U_p + (n-p)r$

} SA

On suppose que $(U_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique

1) On sait que $U_0 = 2$ et $r = -3$. Calculer U_{10}, U_{20}.
2) On sait que $U_0 = 2$ et $U_2 = 10$. Calculer r, U_1, U_5.
3) On sait que $U_{20} = -52$ et $U_{51} = -145$. Expliciter U_n.
4) On sait que $U_{22} = 15$ et $r = 3/4$. Expliciter U_n.

1) $u_{10} = u_0 + 10r$

$u_{10} = 2 + 10 \times (-3) = 2 - 30$

$u_{10} = -28$

$u_{20} = u_0 + 20r$

$u_{20} = 2 + 20 \times (-3)$

$= 2 - 60$

$u_{20} = -58$

2) $u_2 = u_0 + 2r$ donc $10 = 2 + 2r \iff 2r = 8 \iff r = 4$

$u_1 = u_0 + r = 2 + 4 = 6$ $u_5 = u_0 + 5r = 2 + 5 \times 4 = 22$

3) $u_{51} = u_{20} + (51 - 20)r \Rightarrow -145 = -52 + 31r$

$\iff 31r = -145 + 52 \iff 31r = -93 \iff r = -\frac{93}{31} = -3.$

$u_{20} = u_0 + 20r \Rightarrow -52 = u_0 - 60 \Rightarrow u_0 = -52 + 60 = 8.$

$u_n = 8 - 3n$

4) $u_{22} = 15$ $\quad r = \frac{3}{4}$

Donc $u_n = u_{22} + (n-22)\,r \Rightarrow u_n = 15 + (n-22)\frac{3}{4}$

$\Rightarrow u_n = 15 - 22\times\frac{3}{4} + \frac{3}{4}n \Rightarrow u_n = 15 - \frac{33}{2} + \frac{3}{4}n$

$u_n = -\frac{3}{2} + \frac{3}{4}n$

Exercice 3.3

Point méthode : on utilise les formules suivantes

$V_n = q^n \times V_0$
$V_n = q^{n-1} \times V_1$
$V_n = q^{n-p} \times V_p$

géométriques

On suppose que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique

1) On sait que $V_0 = 32$ et $q = 1/4$. Calculer V_2, V_8.
2) On sait que $V_0 = 3$ et $V_2 = 12$. Calculer q, V_1, V_5.
3) On sait que $V_3 = 243$ et $V_6 = 9$. Expliciter V_n.
4) On sait que $V_1 = -1$ et $V_{10} = 1$. Expliciter V_n.

1) $v_2 = v_0 q^2 = 32 \times \frac{1}{4^2} = \frac{32}{16} = 2.$

$v_8 = v_0 q^8 = 32 \times \frac{1}{4^8}$

$= \frac{2\times 4^2}{4^8} = \frac{2}{4^6}$ ← suffisant

$= \frac{2}{(2^2)^6} = \frac{2}{2^{12}} = \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2048}$

2) $v_2 = v_0 q^2 \Rightarrow 12 = 3q^2$

$\Rightarrow q^2 = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow q = 2$ ou $q = -2$.

Si $q = 2$, $v_1 = v_0 q = 3\times 2 = 6$; $v_5 = v_0 q^5 = 3\times 2^5 = 96$

Si $q = -2$ $v_1 = 3\times(-2) = -6$; $v_5 = 3\times(-2)^5 = -96$

3) $v_6 = v_3\, q^{6-3} \Rightarrow q = 243 \times q^3$

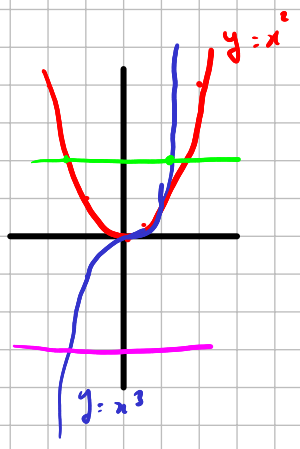
$\Rightarrow 3^2 = 3^5 q^3$

$\Rightarrow q^3 = \frac{3^2}{3^5} = \frac{1}{3^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$

unique solution

$81 \times 3 = 243$

$243 = 3^5$



$v_n = v_6\, q^{n-6} \Rightarrow v_n = q\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-6}$

$\Rightarrow v_n = \frac{3^2}{3^{n-6}} = \frac{3^2}{3^{-6}} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^8 \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$

4) $v_1 = -1$ $\quad v_{10} = 1$ $\quad v_n$?

$v_{10} = v_1 q^9 \Rightarrow 1 = (-1) q^9 \Rightarrow q^9 = -1 \Rightarrow q = -1.$

$v_n = v_1 q^{n-1} \Rightarrow v_n = (-1)\cdot(-1)^{n-1} = (-1)^0 \cdot (-1)^n = (-1)^n.$

Exercice 3.4 **(facultatif)**

Albert place un capital initial C_0 = 3000€ à un taux annuel de 6%, les intérêts étant simples, c'est-à-dire que le capital d'une année est égal à celui de l'année précédente augmenté de 6% du capital initial (les intérêts ne sont pas capitalisés chaque année, contrairement aux intérêts composés).

On note C_n le capital d'Albert au bout de n années, capital exprimé en euros.

1) Montrer que pour tout entier n, $C_{n+1} = C_n + 180$. Qu'en déduit-on ?
2) Pour tout entier n, exprimer C_n en fonction de n.
3) De quel capital Albert dispose-t-il au bout de 10 ans ?
4) Au bout de combien d'années le capital a-t-il doublé ?
5) Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il 10 000€ ?

1) D'une année à l'autre les intérêts sont constants et valent 6% de 3000

$6\% \times 3000 = 0{,}06 \times 3000 = 6 \times 30 = 180$ €.

de C_n à C_{n+1}, on ajoute 180 €

$\Leftrightarrow$ $C_{n+1} = C_n + 180$ (C_n) est donc arithmétique

2) $C_n = C_0 + nr$ $\Rightarrow$ $C_n = 3000 + 180n$.

3) Au bout de 10 ans, le capital est $C_{10} = 3000 + 180 \times 10 = 4800$ €.

4) Pour "doubler", le capital doit dépasser $2 \times C_0 = 6000$

On résout $C_n \geq 6000 \Leftrightarrow 3000 + 180n \geq 6000 \Leftrightarrow 180n \geq 3000$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{3000}{180} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3} \simeq 16{,}7$

Il faut 17 ans à Albert pour que le capital double.

5) On résout $C_n \geq 10000 \Leftrightarrow 3000 + 180n \geq 10000$

$\Leftrightarrow 180n \geq 7000 \Leftrightarrow 18n \geq 700 \Leftrightarrow 9n \geq 350$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{350}{9} \simeq 38{,}9$

Il faut 39 ans pour que le capital dépasse 10 000 €.

Exercice 3.5 **(facultatif)**

On suppose que chaque année la production d'une usine subit une baisse de 4%. Au cours de l'année 2000, la production a été de 25 000 unités. On note P_0 = 25 000 et P_n la production prévue au cours de l'année 2000+n.

1) Déterminer la nature de la suite. Préciser ses paramètres.
2) Si la production descend en dessous de 15 000 unités, l'usine sera en faillite. Quand cela se produira-t-il si la baisse persiste ?

1) D'une année à l'autre la prod. baisse de 4%.

D'une année à l'autre la prod. est multipliée par 0,96.

Donc : $P_{n+1} = P_n \times 0,96$

(P_n) est géométrique de raison 0,96 et de premier terme $P_0 = 25000$.

Conséquence : $P_n = 25000 \times 0,96^n$

2) On résout $P_n \leq 15000$

$\Leftrightarrow 25000 \times 0,96^n \leq 15000$

$\Leftrightarrow 0,96^n \leq \frac{15}{25} = \frac{3}{4} = 0,75$

$0,96^0 = 1$

$0,96^1 = 0,96$

⋮

$0,96^4 \simeq 0,85$

⋮

$0,96^7 \simeq 0,7514$

$0,96^8 \simeq 0,72$

Il faut 8 ans pour que la prod. descende sous 15000.

$0,96^n \leq 0,75$

$\downarrow \ln \nearrow$

$\ln(0,96^n) \leq \ln(0,75)$

$n \ln(0,96) \leq \ln(0,75)$ ⚠ $\ln(0,96) < 0$

$n \geq \frac{\ln(0,75)}{\ln(0,96)} \simeq 7,04$

On seulement calculer les termes ...