

https://gkzk.xyz

Exo I.5

Résoudre les équations et inéquations suivantes (on pourra interpréter graphiquement, en terme de parabole – forme, sommet – et d'intersection avec les axes).

- 1) $x^2 - 4x + 3 = 0$ puis $x^2 - 4x + 3 \geq 0$
- 2) $x^2 - x + 1 = 0$ puis $x^2 - x + 1 < 0$
- 3) $-x^2 - x + 2 = 0$ puis $-x^2 - x + 2 \leq 0$
- 4) $x^2 - 10x + 25 = 0$ puis $x^2 - 10x + 25 \geq 0$
- 5) $-x^2 - 2x - 2 = 0$ puis $-x^2 - 2x - 2 < 0$

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (E) et $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ (I)

2nd degré

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

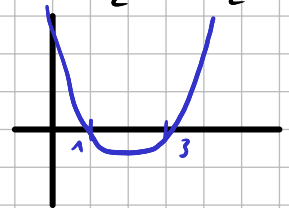
(E) admet 2 solutions $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$

et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

Rappel

$ax^2 + bx + c$ est tjrs du signe de a sauf entre ses éventuelles racines.



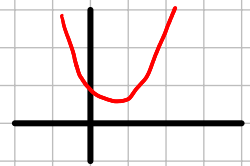
x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	$\emptyset$	$\emptyset$	+

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

$$\mathcal{S} =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$$

2) $x^2 - x + 1 = 0$ (E) $x^2 - x + 1 \leq 0$

2nd degré: $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$



• Pas de racine et (E) n'a pas de solution. $\mathcal{S} = \emptyset$

• $x^2 - x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (I): $\mathcal{S} = \emptyset$

3) $-x^2 - x + 2 = 0$ (E) et $-x^2 - x + 2 \leq 0$ (I)

2nd degré: $\Delta = 1 + 4 \times 2 = 9 = 3^2 > 0$

2 racines réelles

$$x_1 = \frac{1-3}{-2} = 1$$

$$x_2 = \frac{1+3}{-2} = -2$$

$$\begin{aligned} -x^2 - x + 2 &= a(x-x_1)(x-x_2) \\ &= -(x-1)(x+2) \\ &= (1-x)(2+x) \end{aligned}$$

(E): $\mathcal{S} = \{1; -2\}$

(I)

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$-x^2 - x + 2$	-	$\emptyset$	$\emptyset$	-

$$\mathcal{S} =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$$

$$4) \quad x^2 - 10x + 25 = 0 \quad (E) \quad x^2 - 10x + 25 > 0 \quad (I)$$

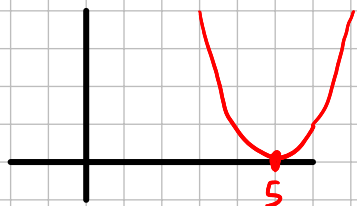
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a = x \quad b = 5$$

$$(E) \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4 \times 25 = 0. \quad x_0 = \frac{10}{2} = 5.$$

$$(I) \quad (x-5)^2 > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad \mathcal{I} = \mathbb{R}.$$



Exercice 1.6

1) a) Résoudre l'équation $2x^2 + 5x + 2 = 0$

b) En utilisant un changement d'inconnue, en déduire les solutions de l'équation

$$2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$$

c) En utilisant un changement d'inconnue, en déduire les solutions de l'équation

$$\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-1} + 2 = 0$$

2) Par une méthode analogue, résoudre l'équation $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

3) Par une méthode analogue résoudre $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$

$$1. a) \quad 2x^2 + 5x + 2 = 0 \quad 2^{\text{nd}} \text{ degré. } \Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-5-3}{4} = -2 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$$b) \quad 2x^4 + 5x^2 + 2 = 0 \quad (E) \quad \text{Pas du } 2^{\text{nd}} \text{ degré}$$

$$\bullet \text{ On pose } X = x^2. \quad (x^2)^2 = x^4 = X^2$$

$$\bullet \text{ On remplace } (E') \quad 2X^2 + 5X + 2 = 0 \quad \text{déjà résolue}$$

$$X_1 = -2 \quad \text{ou} \quad X_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ On revient à } x \text{ en résolvant } x^2 = X$$

$$\text{On résout } x^2 = -2 \quad \text{et} \quad x^2 = -\frac{1}{2}$$

impossible impossible

$$(E) : \quad \mathcal{I} = \emptyset$$

$$c) \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-1} + 2 = 0 \quad (\epsilon)$$

On pose $X = \frac{1}{x-1}$ et on remplace : $2X^2 + 5X + 2 = 0$

$$X_1 = -2$$

ou $X_2 = -\frac{1}{2}$

On revient à x :

$$\frac{1}{x-1} = -2$$

ou

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x-1 = -\frac{1}{2}$$

$$x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x-1 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$$(\epsilon) : \mathcal{S} = \left\{ -1; \frac{1}{2} \right\}.$$

2. $(\epsilon) x^4 - 4x^2 + 3 = 0$. On pose $X = x^2$.

$$(\epsilon') X^2 - 4X + 3 = 0 \quad \Delta = \dots \quad X_1 = -3 \quad X_2 = -1$$

$$x^2 = -3 \quad \not\exists$$

$$x^2 = -1 \quad \not\exists$$

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

I.8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 25x + 42$.

- 1) Montrer que -3 est une solution de $f(x) = 0$. (ϵ)
- 2) Déterminer trois réels a , b et c tels que $f(x) = (x+3)(ax^2+bx+c)$ pour tout réel x .
- 3) Résoudre $f(x) = 0$.

1) -3 solution de (ϵ) si $f(-3) = 0$

$$f(-3) = 3 \cdot (-3)^3 - 4 \cdot (-3)^2 - 25 \cdot (-3) + 42$$

$$f(-3) = -81 - 36 + 75 + 42 = 0.$$

2) P polynôme. $P(x_0) = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)$ factorise le polynôme

accepté division polynomiale, Horner

Par identification des coefficients

$$3x^3 - 4x^2 - 25x + 42 = (x+3)(ax^2+bx+c)$$

Donc $ax^3 + (3a+b)x^2 + (3b+c)x + 3c$

Par identification :

$$\begin{cases} a = 3 \\ 3a + b = -4 \\ 3b + c = -25 \\ 3c = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 - 3a = -13 \\ 3b + c = -39 + 14 = -25 \\ c = 14 \end{cases} \quad \text{Vérif}$$

$$3x^3 - 4x^2 - 25x + 42 = (x+3)(3x^2 - 13x + 14)$$

3) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0$ ou $3x^2 - 13x + 14 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ ou $\Delta = 13^2 - 4 \times 3 \times 14 = 13^2 - 12 \times 14$
 $\Delta = 169 - 168 = 1 > 0$

$$X_1 = \frac{13-1}{6} = 2 \quad X_2 = \frac{13+1}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

$$\mathcal{J} = \left\{ -3; 2; \frac{7}{3} \right\}$$

Exercice 1.9

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$.

- 1) Montrer que 1 est solution de $g(x) = 0$.
- 2) Déterminer trois $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ et $\tilde{c}$ tels que $g(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$ pour tout réel x .
- 3) En déduire le signe de $g(x)$.

1) 1 solution de $g(x) = 0$ si $g(1) = 0$

$$g(1) = 1^3 + 5 \times 1 - 12 \times 1 + 6 = 6 - 12 + 6 = 0. \quad \checkmark$$

2) Mq (1.1) factorise $g(x)$

Par identification. $(x-1)(ax^2 + bx + c)$

$$= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

On identifie les coefficients

$$\begin{cases} a = 1 \\ b-a = 5 \\ c-b = -12 \\ -c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5+a = 6 \\ c-b = -6-6 = -12 \\ c = -6 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$x^3 + 5x^2 - 12x - 6 = (x-1)(x^2 + 6x - 6)$$

3) signe?

$$x^2 + 6x - 6$$

$$\Delta = 36 + 4 \times 6 = 36 + 24 = 60.$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{60}}{2} = \frac{-6 - \sqrt{4 \times 15}}{2} = \frac{-6 - 2\sqrt{15}}{2} = -3 - \sqrt{15}$$

$$x_2 = -3 + \sqrt{15}$$

$$-3 + \sqrt{16} = -3 + 4 = 1 > -3 + \sqrt{15}.$$

x	$-\infty$	$-3 - \sqrt{15}$		$-3 + \sqrt{15}$		1	$+\infty$
$x-1$	-		-		-	$\oplus$	+
$x^2 + 6x - 6$	+	$\oplus$	-	$\oplus$	+		+
$g(x)$	-	$\oplus$	+	$\oplus$	-	$\oplus$	+

□

Si blocus en ou ... le <https://qkzk.xyz>