NOM, Prénom : Correction .... Groupe : ....

Mathématiques 1
Interrogation n° 1

fasest | Université de Lille — L1 Économie Gestion

Durée : 45 minutes — Documents autorisés : aucun — Calculatrice : non autorisée

---

Les nombres u et t sont deux réels tels que :

$$0 < u < 1 \tag{1}$$

$$0 < t < 1 \tag{2}$$

Pour les deux questions suivantes, détailler chaque étape, en justifiant lorsque nécessaire.

1. Démontrer que :

$$0 < (1-u)(1-t) < 1 \tag{3}$$

- $0 < u < 1 \Rightarrow 0 > -u > -1 \Rightarrow 1 > 1-u > 0 \Rightarrow 0 < 1-u < 1$
  $\times(-1)$ renverse l'inégalité ; $+1$; retourner l'encadrement
- $0 < t < 1 \Rightarrow 0 > -t > -1 \Rightarrow 1 > 1-t > 0 \Rightarrow 0 < 1-t < 1$
- $(1-u)(1-t)$: produit de 2 nombres >0 donc >0 : $(1-u)(1-t) > 0$
- $(1-u)(1-t)$: produit de 2 nombres <1 donc <1 : $(1-u)(1-t) < 1$

Conclusion $0 < (1-u)(1-t) < 1$ $\square$

2. En déduire que :

$$\frac{1}{1+ut-u-t} > 1 \tag{4}$$

- $(1-u)(1-t) = 1-u-t+ut = 1+ut-u-t$

On a donc $0 < 1+ut-u-t < 1$ d'après la Question 1.

La fonction inverse : $x \longmapsto \frac{1}{x}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$

donc $\frac{1}{1+ut-u-t} > \frac{1}{1} = 1.$ $\square$

Pour les trois prochaines questions, les nombres b, H, K sont des réels strictement positifs.

3. Dans le plan $(x\,;y)$, on considère la droite (d) d'équation :

$$y = -\frac{b}{1+ut-u-t}x + \frac{\mathrm{H}+\mathrm{K}}{1+ut-u-t} \tag{5}$$

Donner le coefficient directeur de cette droite et, à l'aide de l'inégalité (4), déterminer son signe.

On reconnaît l'équation réduite d'une droite, de la forme $y = ax+b$.

Le coefficient directeur est $a = -\frac{b}{1+ut-u-t}$.

- $b > 0$ et (Q1) $\frac{1}{1+ut-u-t} > 0$ donc $-\frac{b}{1+ut-u-t} < 0$

4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (d) avec les axes de coordonnées du plan $(x\,;y)$.

On rappelle que l'équation de (d) est : $y = -\dfrac{b}{1+ut-u-t}x + \dfrac{\mathrm{H}+\mathrm{K}}{1+ut-u-t}$

- $y = ax + b$ coupe l'axe des ordonnées Oy en $(0\,;b)$
  donc ici, (d) coupe Oy en $\left(0\,;\dfrac{H+K}{1+ut-u-t}\right)$
- $y = ax+b$ coupe l'axe des abscisses Ox et $\left(-\dfrac{b}{a}\,;0\right)$ si $a \neq 0$
  $\left[ax+b=0 \iff ax=-b \iff x=-\dfrac{b}{a}\right]$

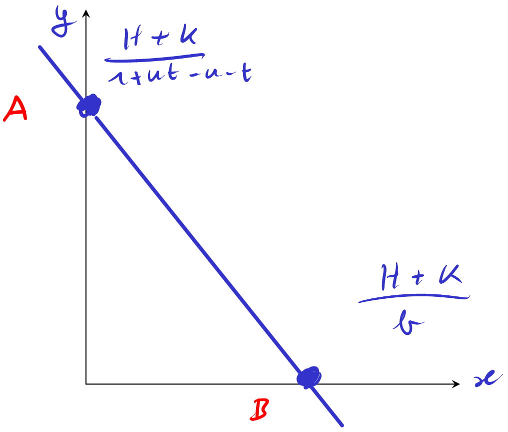
On a, pour (d) :

$$-\frac{b}{a} = -\frac{\dfrac{H+K}{1+ut-u-t}}{-\dfrac{b}{1+ut-u-t}} \underset{\text{simplification des } \ominus}{=} \frac{\dfrac{H+K}{1+ut-u-t}}{\dfrac{b}{1+ut-u-t}}$$

simplification des dénominateurs communs $\quad -\dfrac{b}{a} = \dfrac{H+K}{b}$.

(d) coupe l'axe des abscisses Ox en $\left(\dfrac{H+K}{b}\,;0\right)$

5. Faire un schéma représentant cette droite dans le plan $(x\,;y)$.



- $\dfrac{H+K}{1+ut-u-t} > 0$
- $\dfrac{H+K}{b} > 0$
- la pente est < 0

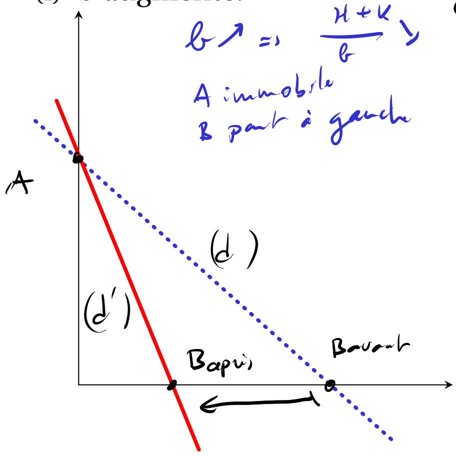
6. Dans chacun des cas suivants, représenter sur un schéma les mouvements de la droite (d) lorsque :

(i) b augmente.

$b \nearrow \Rightarrow \dfrac{H+K}{b} \searrow$

A immobile

B part à gauche

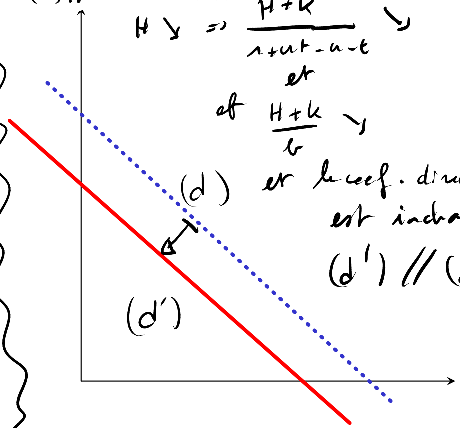


(ii) H diminue.

$H \searrow \Rightarrow \dfrac{H+K}{1+ut-u-t} \searrow$ et $\dfrac{H+K}{b} \searrow$

et le coef. directeur est inchangé

$(d') \,//\, (d)$



(iii) u diminue.

(d) avant

(d') après

$u \searrow 0 \Rightarrow 1-u \nearrow \Rightarrow \dfrac{1}{(1-u)(1-t)} \searrow$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{(1-u)(1-t)} \nearrow$

le coef. directeur $\nearrow$

et $\dfrac{H+K}{1-ut-u-t} \searrow$

A descend