

Livret d'exercices – L1 – FaSEST Outils mathématiques pour l'économiste
--

Exercices se rapportant au chapitre 1 (résolutions d'équations et d'inéquations).....	2
Exercices se rapportant au chapitre 2 (droites).....	6
Exercices se rapportant au chapitre 3 (suites)	8
Exercices se rapportant au chapitre 4 (raisonnements).....	11
Exercices se rapportant au chapitre 5 (généralités sur les fonctions).....	12
Exercices se rapportant au chapitre 6 (Fonctions usuelles).....	14

Exercices se rapportant au chapitre 1 (Résolutions d'équations et d'inéquations)

Exercice 1.1

Point méthode :

On « isole le x », donc on regroupe « tout ce qui dépend de x d'un côté, tous les nombres de l'autre » puis on divise par le coefficient de x.

Et on n'oublie pas que si $A \times B = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$

Résoudre les équations suivantes

- 1) $x+4 = 2x - 5$
- 2) $-3x = x - \frac{1}{3}$
- 3) $3 - 4x = 4x - 5$
- 4) $5(x-1) + 2 = x - 4$
- 5) $\frac{1}{2}(x-1) = x - \frac{1}{2}$
- 6) $\frac{2}{5}(x-1) + x = 1$
- 7) $\frac{2x-3}{x} = 1$
- 8) $\frac{x-1}{2x} + \frac{x+1}{x} = 0$ pour $x \neq 0$
- 9) $(2x-1)(x+5) = 0$
- 10) $(3x+2)(4-x) = 0$

Exercice 1.2

Point méthode : même méthode que pour les égalités mais attention au changement de sens de l'inégalité si on divise (ou multiplie) par un nombre négatif.

Résoudre les inéquations suivantes (et donner les résultats sous forme d'intervalles)

- 1) $4x - 2 < x + 1$
- 2) $5 - x > -3x + 2$
- 3) $\frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right) < x + 1$
- 4) $2(x-1) - 3x \geq -3$
- 5) $\frac{2}{3}x + 1 \leq x$
- 6) $-\frac{1}{5}x \leq \frac{2}{5} + 2x$
- 7) $(x+2)(x-1) \geq 0$
- 8) $(1-x)(x+5) > 0$
- 9) $(x-3)(x+1) \leq 0$
- 10) $\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} \geq 0$ pour $x \neq 1$ et -1

Exercice 1.3

Point méthode : on utilise la méthode par substitution ou la méthode par combinaison, vues en cours

Résoudre algébriquement les systèmes

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 3y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -4x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 5y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} -0,5x + y = 1 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$$

(Pour ceux qui sont à l'aise, résoudre géométriquement également).

Exercice 1.4

Point méthode : on utilise les mêmes méthodes que pour l'exercice précédent

Dans un magasin, tous les articles d'une même catégorie sont au même prix. Pierre et Clothilde décident d'acheter des DVD et des BD. Ils possèdent chacun 75€. Pierre achète un DVD et 4 BD ; il lui reste 14,50€. Clothilde dépense 73,50€ pour 2 DVD et 3 BD. Calculer le prix de chaque article.

Exercice 1.5

Point méthode : résolution des équations du 2nd degré

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et on examine son signe.

Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet 2 racines distinctes données par les formules suivantes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une racine unique donnée par la formule

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de racines réelles.

Résolution d'inéquations du 2nd degré

Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet 2 racines distinctes et le signe est résumé dans le tableau suivant

x	x_1		x_2	
Signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de -a	0

$$\text{Avec } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta \leq 0$ alors l'expression $ax^2 + bx + c$, est toujours du signe de a.

Résoudre les équations et inéquations suivantes (on pourra interpréter graphiquement, en terme de parabole – forme, sommet - et d'intersection avec les axes).

- 1) $x^2 - 4x + 3 = 0$ puis $x^2 - 4x + 3 \geq 0$
- 2) $x^2 - x + 1 = 0$ puis $x^2 - x + 1 < 0$
- 3) $-x^2 - x + 2 = 0$ puis $-x^2 - x + 2 \leq 0$
- 4) $x^2 - 10x + 25 = 0$ puis $x^2 - 10x + 25 \geq 0$
- 5) $-x^2 - 2x - 2 = 0$ puis $-x^2 - 2x - 2 < 0$

Exercice 1.6

- 1) a) Résoudre l'équation $2x^2 + 5x + 2 = 0$
- b) En utilisant un changement d'inconnue, en déduire les solutions de l'équation

$$2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$$

- c) En utilisant un changement d'inconnue, en déduire les solutions de l'équation

$$\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-1} + 2 = 0$$

- 2) Par une méthode analogue, résoudre l'équation $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$
- 3) Par une méthode analogue résoudre $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$

Exercice 1.7 (facultatif)

Les questions sont indépendantes

- 1) On considère le trinôme suivant : $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3)$
Pour quelles valeurs de m ce trinôme a-t-il une racine double ? Calculer alors cette racine.
- 2) On considère le trinôme suivant : $x^2 - (2m+3)x + m^2$.
Pour quelles valeurs de m ce trinôme a-t-il une racine double ? Calculer alors cette racine.
- 3) On considère l'équation $2x^2 - (m+2)x + m - 2 = 0$.
Calculer m pour que l'une des solutions soit égale à 3. En déduire l'autre solution de l'équation.

Exercice 1.8

Point méthode : résolution d'une équation du 3^{ème} degré.

- 1) On détermine une racine évidente x_0 c'est-à-dire une valeur telle que $A(x_0) = 0$
- 2) On factorise par $(x - x_0)$ c'est-à-dire que l'on écrit $A(x) = (x - x_0)(a'x^2 + b'x + c')$
- 3) On développe $(x - x_0)(a'x^2 + b'x + c')$, on ordonne et on identifie avec $ax^3 + bx^2 + cx + d$ pour déterminer les constantes a' , b' , c' .

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 25x + 42$.

- 1) Montrer que -3 est une solution de $f(x) = 0$.

- 2) Déterminer trois réels a , b et c tels que $f(x) = (x+3)(ax^2+bx+c)$ pour tout réel x .
- 3) Résoudre $f(x) = 0$.

Exercice 1.9

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$.

- 1) Montrer que 1 est solution de $g(x) = 0$.
- 2) Déterminer trois a , b et c tels que $g(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$ pour tout réel x .
- 3) En déduire le signe de $g(x)$.

Exercice 1.10 (facultatif)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - ax + 3$ où a est un nombre réel.

- 1) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles l'équation $h(x) = 0$ admet deux racines distinctes.
- 2) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles l'équation $h(x) = 0$ admet une racine double.
- 3) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles l'équation $h(x) = 0$ admet n'admet pas de racine.
- 4) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le minimum de h est strictement inférieur à -1 .

Exercices se rapportant au chapitre 2 (Droites)

Exercice 2.1

Point méthode : on se ramène à une équation du type $y = ax + b$

Soit on trace grâce à la pente et l'ordonnée à l'origine

Soit on fait un tableau de valeurs : on choisit 2 valeurs de x au hasard et on calcule l'ordonnée correspondante.

Tracer les droites suivantes de la manière la plus rapide possible **(et indiquer les droites parallèles, perpendiculaires en justifiant)**

(d1) $2x + y = 3$ (d2) $x = -1$ (d3) $y = \frac{1}{2}$ (d4) $\frac{1}{2}y = -x + 3$ (d5) $2y - x - 2 = 0$ (d6) $y - \frac{1}{3}x = \frac{5}{3}$

(d7) $y - 2x + 5 = 0$ (d8) $2y = 3x$ (d9) $-x - y = 0$ (d10) $y - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

Exercice 2.2

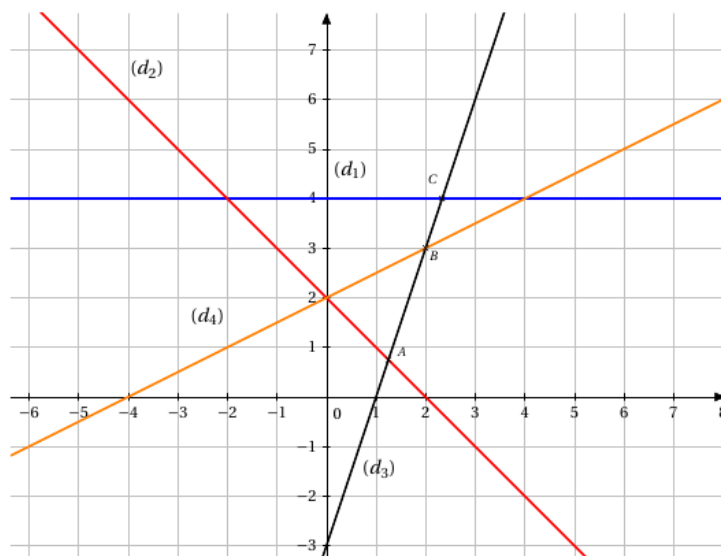
Résoudre géométriquement les systèmes

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 3y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -4x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 5y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} -0,5x + y = 1 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$$

Exercice 2.3

1. Par lecture graphique, déterminer l'équation réduite des quatre droites représentées sur ce graphique .



2. Déterminer par le calcul les coordonnées des points A , B et C .

3. Vérifier graphiquement les réponses précédentes.

Exercice 2.4

Sur le marché, l'offre concernant un produit est donnée par $Q_o = \frac{1}{2}p + 10$ alors que la demande est donnée par $Q_d = \frac{-1}{2}p + 30$ (où p est le prix du produit)

- 1) Déterminer, par le calcul, le prix et la quantité d'équilibre.
- 2) Retrouver le résultat graphiquement.

Exercice 2.5

On suppose que la courbe de demande est décrite par une droite de la forme $q = mp + b$.

Déterminer son équation étant données les informations suivantes : un promoteur découvre que la demande en billets de théâtre est de 1200 lorsque le prix est de 60€ mais chute à 900 lorsque le prix est haussé à 75€.

Exercice 2.6

La quantité et le le prix d'équilibre d'un bien sont déterminés par l'intersection des courbes de l'offre et la demande. Pour un produit donné, l'offre est déterminée par la droite :

$$q_{offre} = 30p - 45$$

Et la demande, pour ce même produit, par la droite :

$$q_{demande} = -15p + 855$$

Déterminer le prix et la quantité d'équilibre et tracer, sur un même graphique, les courbes de l'offre et de la demande.

Exercice 2.7 (facultatif)

Une compagnie produit des chaussures. Lorsque 30 chaussures sont produites, le coût total de production est de 325€. Lorsque 50 chaussures sont produites, le coût s'élève alors à 485€. Quelle est l'équation du coût C si celui-ci varie de façon linéaire en fonction du nombre de chaussures produites q?

Exercices se rapportant au chapitre 3 (Suites)

Exercice 3.1

Point méthode : si la différence entre 2 termes consécutifs est constante, c'est une SA ; si le quotient de deux termes consécutifs est constant, c'est une SG.

- 1) 6, 10, 14 peuvent-ils être les 3 premiers termes d'une suite arithmétique ? Justifier
- 2) 5, 25, 120 peuvent-ils être les 3 premiers termes d'une suite géométrique ? Justifier

Exercice 3.2

Point méthode : on utilise les formules suivantes

$$U_n = U_0 + nr.$$

$$U_n = U_1 + (n-1)r \text{ si le premier terme est } U_1.$$

$$\text{De manière plus générale } U_n = U_p + (n-p)r$$

On suppose que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique

- 1) On sait que $U_0 = 2$ et $r = -3$. Calculer U_{10}, U_{20} .
- 2) On sait que $U_0 = 2$ et $U_2 = 10$. Calculer r, U_1, U_5 .
- 3) On sait que $U_{20} = -52$ et $U_{51} = -145$. Expliciter U_n .
- 4) On sait que $U_{22} = 15$ et $r = 3/4$. Expliciter U_n .

Exercice 3.3

Point méthode : on utilise les formules suivantes

$$V_n = q^n \times V_0$$

$$V_n = q^{n-1} \times V_1$$

$$V_n = q^{n-p} \times V_p$$

On suppose que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique

- 1) On sait que $V_0 = 32$ et $q = 1/4$. Calculer V_2, V_8 .
- 2) On sait que $V_0 = 3$ et $V_2 = 12$. Calculer q, V_1, V_5 .
- 3) On sait que $V_3 = 243$ et $V_6 = 9$. Expliciter V_n .
- 4) On sait que $V_1 = -1$ et $V_{10} = 1$. Expliciter V_n .

Exercice 3.4 (facultatif)

Albert place un capital initial $C_0 = 3000\text{€}$ à un taux annuel de 6%, les intérêts étant simples, c'est-à-dire que le capital d'une année est égal à celui de l'année précédente augmenté de 6% du capital initial (les intérêts ne sont pas capitalisés chaque année, contrairement aux intérêts composés).

On note C_n le capital d'Albert au bout de n années, capital exprimé en euros.

- 1) Montrer que pour tout entier n , $C_{n+1} = C_n + 180$. Qu'en déduit-on ?
- 2) Pour tout entier n , exprimer C_n en fonction de n .
- 3) De quel capital Albert dispose-t-il au bout de 10 ans ?
- 4) Au bout de combien d'années le capital a-t-il doublé ?
- 5) Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il 10 000€ ?

Exercice 3.5 (facultatif)

On suppose que chaque année la production d'une usine subit une baisse de 4%. Au cours de l'année 2000, la production a été de 25 000 unités. On note $P_0 = 25\,000$ et P_n la production prévue au cours de l'année $2000+n$.

- 1) Déterminer la nature de la suite. Préciser ses paramètres.
- 2) Si la production descend en dessous de 15 000 unités, l'usine sera en faillite. Quand cela se produira-t-il si la baisse persiste ?

Exercice 3.6

Point méthode : on utilise les formules suivantes

$$S = (\text{nombre de termes dans la somme}) \times \frac{\text{premier terme de la somme} + \text{dernier terme de la somme}}{2}$$

$$S = (\text{Premier terme de la somme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

- 1) On considère une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

$$\text{Calculer } S = U_0 + \dots + U_7$$

- 2) On considère une suite géométrique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $r = \frac{1}{2}$.

$$\text{Calculer } S = U_0 + \dots + U_7.$$

- 3) On considère une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $r = -2$.

$$\text{Calculer } S = U_5 + \dots + U_{15}$$

- 4) On considère une suite géométrique de premier terme $U_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $r = 2$.

$$\text{Calculer } S = U_5 + \dots + U_{12}.$$

- 5) On considère une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

$$\text{Déterminer } n \text{ tel que } \sum_{k=0}^{k=n} U_k = 15\,050$$

Exercice 3.7 (facultatif) (plus difficile)

Les questions sont indépendantes

- 1) En reconnaissant la somme des termes d'une suite arithmétique, calculer

$$S = \frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \dots + \frac{19}{3} + 7$$

- 2) Calculer la somme des 20 premiers entiers pairs (modéliser le problème à l'aide d'une suite)
- 3) Démontrer que la somme $S = 1+3+5+\dots+99$ est le carré d'un entier naturel.
- 4) En reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique, calculer :

$$S_1 = 2^7 + 2^8 + \dots + 2^{21}$$

$$S_2 = 18 + 54 + 162 + \dots + 39366$$

$$S_3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots - \frac{1}{1048576}$$

Exercice 3.8

Point méthode : on utilise la méthode suivante

On détermine la fonction f sous-jacente à la suite.

On détermine le point fixe de cette fonction, c'est-à-dire le réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$.

On introduit la suite annexe $V_n = U_n - \alpha$ dont on peut vérifier qu'il s'agit d'une suite géométrique de raison a ...et que l'on sait étudier

Au 1^{er} janvier 2017, une association sportive compte 900 adhérents. On constate que chaque mois :

- 25% des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion.
- 12 nouvelles personnes décident d'adhérer à l'association.

On modélise le nombre d'adhérents de l'association par la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$U_0 = 900 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 0.75U_n + 12.$$

Le terme U_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents de l'association au bout de n mois.

- 1) Déterminer l'expression de U_n en fonction de n (utiliser la méthode vue en cours).
- 2) La présidente de l'association assure qu'elle démissionnera si le nombre d'adhérents descend en dessous de 100. Si l'évolution continue, la présidente démissionnera-t-elle ? si oui au bout de combien de mois ?

Exercice 3.9

Une entreprise de téléphonie mobile constate un taux de churn, c'est-à-dire de déperdition de sa clientèle de 16%. Dans le même temps, elle arrive à capter 100 000 nouveaux abonnés par an.

On suppose qu'en 2020 le nombre de clients est de 400 000. On note $U_0 = 400\,000$.

- 1) Exprimer le nombre d'abonnés U_n pour l'année 2020+ n , en fonction de n .
- 2) Au fil du temps, vers quel nombre d'abonnés l'entreprise se stabilisera-t-elle ?

Exercices se rapportant au chapitre 4 (Raisonnements)

Démontrer par récurrence les propositions suivantes

- 1) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
- 2) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
- 3) Soit $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \\ U_0 = 1 \end{cases}$. Montrer que pour tout n entier naturel, $U_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- 4) Soit $\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n - 3 \\ U_0 = 1 \end{cases}$. Montrer que pour tout n entier naturel, $U_n = 3 - (2)^{n+1}$
- 5) $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (y-a-t-il une autre méthode pour calculer cette somme ?)
- 6) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- 7) $\sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$

Exercices se rapportant au chapitre 5 (Généralités sur les fonctions)

Exercice 5.1 Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes.

Point méthode : on cherche les valeurs interdites de f et on les « retire » de l'ensemble des réels.

Une fonction affine, un polynôme sont définis pour tout x réel.

Une fraction est définie si son dénominateur est non nul.

Une racine carrée est définie si l'expression sous le radical est positive ou nulle.

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 5$$

$$f_2(x) = (3x - 2)^3$$

$$f_3(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$f_4(x) = \frac{2}{x^2}$$

$$f_5(x) = \frac{2}{x^2 + 2x - 3}$$

$$f_6(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

$$f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

$$f_8(x) = \sqrt{5-x}$$

$$f_9(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$f_{10}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

Exercice 5.2

Point méthode :

Pour calculer l'image de a par f on remplace x par a dans l'expression de f

Pour trouver le ou les antécédents de b par f , on résout $f(x) = b$

Soit f la fonction définie par $f(x) = 4x - 5$ et $g(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}$.

- 1) Déterminer les ensembles de définition de f et g .
- 2) Quelle est l'image de 0 par f ? par g ? l'image de 3 par f ? par g ?
- 3) Déterminer, s'ils existent, le ou les antécédents de 0, 1 et -1 par f puis par g .

Exercice 5.3

Point méthode : on utilise le tableau des dérivées usuelles (à connaître PAR CŒUR), puis on cherche le signe de la dérivée grâce à la théorie de résolution des équations du 1^{er} ou 2nd degré (à connaître PAR CŒUR)

Point méthode : une fonction est convexe sur un intervalle I ssi $f''(x) \geq 0$

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition, discuter le signe de la dérivée et dresser le tableau de variations de la fonction. Etudier la convexité pour f_1 , f_4 , f_6 .

$$f_1(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - x$$

$$f_2(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

$$f_4(x) = (5x - 1)^3$$

$$f_5(x) = \frac{1}{(x + 1)^3}$$

$$f_6(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x$$

Exercice 5.4

Soit f définie sur $f(x) = 2x^3 + x - 2$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $] -1 ; 1[$.

Exercice 5.5

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $f(3) < f(5)$

Pour chacune des affirmations, dire si elle est vraie, fausse ou indécidable (justifier).

- 1) f croissante sur $\mathbb{R}^+$
- 2) f est strictement croissante sur $[3 ; 5]$
- 3) f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 5.6

f est une fonction telle que $f(3) = -2$ et $f(5) = 3$.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie, fausse ou indécidable (justifier)

- 1) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]3 ; 5[$.
- 2) Si f est continue l'équation admet une unique solution sur $]3 ; 5[$.
- 3) Si f est continue l'équation admet au moins une solution sur $]3 ; 5[$.

Exercices se rapportant au chapitre 6 (Fonctions ln et exp)

Point méthode : on apprend son cours sur le ln et l'exp !!!!

Exercice 6.1

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes

$f_1(x) = \ln(2x - 5)$	$f_2(x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$	$f_3(x) = \ln(x^2 - 4)$	$f_4(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x^2}\right)$
$f_5(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$	$f_6(x) = e^{-x^2+5x+1}$	$f_7(x) = e^{\frac{3}{x^2+x+1}}$	$f_8(x) = \frac{1}{\frac{2}{e^{3x}}}$

Exercice 6.2

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{x^2}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Quelle est l'image de 2 par f ?
- 3) Déterminer, s'ils existent, le ou les antécédents de 1, et e par f .
- 4) Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variations de f .
- 5) Déterminer une équation de la tangente en $x = 1$.
- 6) Etudier la convexité de f .

Exercice 6.3

Déterminer les ensembles de définition, calculer les dérivées des fonctions suivantes, discuter le signe de la dérivée et dresser le tableau de variations de la fonction, étudier la convexité des fonctions f_2 , f_4 , f_5 , f_8 , f_{11} , f_{12} , f_{13} , f_{17} .

$f_1(x) = \ln(x^2 + 1)$	$f_2(x) = x \ln x$	$f_3(x) = e^{-x^2+5x+1}$
$f_4(x) = (x-1)e^x$	$f_5(x) = xe^{-x}$	$f_6(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
$f_7(x) = (3x-2)e^x$	$f_8(x) = (x+1)e^{-x+2}$	$f_9(x) = (2-x)e^x$
$f_{10}(x) = \frac{1}{\ln x}$	$f_{11}(x) = x^2 - 2 \ln x$	$f_{12}(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$
$f_{13}(x) = e^{x+4} - x$	$f_{14}(x) = xe^{x-1}$	$f_{15}(x) = -\frac{e^x}{e^x + 1}$
$f_{16}(x) = x^2 \ln x - x^2$	$f_{17}(x) = 2e^{2x} + 2x - 7$	$f_{18}(x) = (x^2 + 1)e^{2x}$

Exercice 6.4 (pour entraînement éventuel)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (on se préoccupera du domaine de validité)

$\ln(x+2) = \ln(2x+5)$	$\ln(3x-2) = 0$	$\ln(x+2) = \ln\left(\frac{x+11}{x+3}\right)$
$\ln\sqrt{2x-3} = \frac{1}{2}\ln x$	$\ln(x^2-1) = \ln 4 + \ln 2$	$\ln(2x+1) + \ln(-x+1) = 0$
$1 - 2\ln(2x) \geq 0$	$2+3\ln x \leq 0$	$3 - \ln x < 0$
$\ln(x^2-1) - \ln(x+1) = 0$	$\ln(5-x) - \ln 3 + \ln(x-1) \geq 0$	$\ln(x^2-x) < \ln 6$
$\ln(4-x^2) - \ln x = 0$	$e^{x^2-1} = 1$	$e^{2x} + e^x = 2$
$e^{-x\ln 4} = 5$	$e^{3x+4} = 2$	$e^x + e^{-x} - 6 = 0$
$e^{x^2} e^x < e^6$	$e^{3x+1} + e^{2x+1} = e^{x+1+\ln 6}$	

Exercice 6.5

Soit $f(x) = \ln(3x^2-x-2)$ et $g(x) = \ln(6x+4)$

- 1) Déterminer les ensembles de définition de f et g .
- 2) Calculer l'image de 2 par f .
- 3) Déterminer les antécédents de 0 par g .
- 4) Déterminer les points d'intersection des courbes représentatives de f et g .

Exercice 6.6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition I de f .
- 2) Étudier les variations de f .
- 3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $] -0,5 ; 0,5[$.
- 4) (facultatif) Démontrer que f réalise une bijection de I sur un ensemble J que l'on déterminera.
- 5) (facultatif) Déterminer f^{-1} .

Exercice 6.7

Soit f définie par $f(x) = e^x - \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$ et g définie par $g(x) = xe^x - 1$.

- 1) a) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g sur $]0 ; +\infty[$.
b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0 ; 1]$
c) Déterminer le signe de $g(x)$.
- 2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f (en utilisant 1) c))

Exercice 6.8 (facultatif mais classique)

Soit g définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $g(x) = x^3 + 2x^2 \ln x - 3x^2 + 1$

- 1) Soit f définie sur $\mathbb{R}^{**+}$ par $f(x) = 6x + 4\ln x$
 - a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^{**+}$.
 - b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α , avec $0 < \alpha < 1$
 - c) Dédire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^{**+}$.
- 2) Calculer $g''(x)$ et étudier la convexité de g .

Exercice 6.9 (facultatif mais classique)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$

- 1) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe en 0.
- 2) En étudiant la convexité de f , montrer que pour tout x réel, $e^x \geq 1 + x$