

DS de mathématiques 1

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, rappelez-vous qu'il n'est pas nécessaire de traiter la totalité des questions du sujet pour obtenir une bonne note.

Les calculatrices et les documents sont interdits.

Durée : 1h

2024-2025

PROBLÈME :

On va étudier l'équilibre sur un certain marché caractérisé par les fonctions d'offre et de demande suivantes :

$$\begin{aligned} - \text{ Pour l'offre : } & q_s = [5 + \alpha] p - l \\ - \text{ Pour la demande : } & q_d = - [10 - \beta] p + k \end{aligned} \quad (1)$$

Il est supposé en outre que les conditions suivantes sont vérifiées pour les paramètres α, β, l et k qui interviennent dans l'équation 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha \\ 0 \leq \beta < 10 \\ 0 < l \\ 0 < k \end{array} \right. \quad (2)$$

Ces paramètres α, β, l et k sont censés représenter les influences sur les quantités offertes et demandées exercées par des variables autres que le prix de marché p . Par exemple, si le revenu des ménages augmente, le paramètre k pourrait augmenter : quel que soit le prix de marché, la demande va augmenter. Une augmentation de la publicité ou un changement dans les goûts des consommateurs pourraient influencer le paramètre α . Le coût des matières premières pourrait modifier β et des changements de taxes sur les produits importés (notamment le bien échangé sur le marché en question) pourraient modifier l .

On appelle prix d'équilibre sur un marché, le prix pour lequel la quantité demandée est égale à la quantité offerte.

1. **Dans cette question seulement**, on suppose que $\alpha = \beta = 0$, $l = 10$ et $k = 200$.
- Faire un graphique sur lequel vous représenterez la courbe d'offre et la courbe de demande et sur lequel vous ferez apparaître – après avoir déterminé leurs coordonnées – les points d'intersection des courbes d'offre et demande avec les axes de coordonnées.
 - Déterminer le prix d'équilibre sur ce marché. Quelle est alors la quantité échangée sur ce marché? Faites apparaître sur le graphique précédent la situation d'équilibre.

Dans toute la suite de l'exercice, on revient au cas général.

2. Montrer que la quantité d'équilibre q^* et le prix d'équilibre p^* s'expriment, en fonction des paramètres α, β, l et k , de la manière suivante :

$$\begin{cases} p^* = \frac{l+k}{15+\alpha-\beta} \\ q^* = \frac{5+\alpha}{15+\alpha-\beta} \times (l+k) - l \end{cases} \quad (3)$$

3. Démontrer que compte tenu des conditions 2, on a nécessairement :

$$0 < \frac{5+\alpha}{15+\alpha-\beta} < 1$$

Indication : on pourra remarquer que : $15 + \alpha - \beta = 10 - \beta + 5 + \alpha$.

4. Démontrer que la quantité échangée sur le marché est positive si et seulement si :

$$\frac{5+\alpha}{15+\alpha-\beta} \geq \frac{l}{l+k} \quad (4)$$

Vérifier que cette condition 4 est vérifiée avec les hypothèse de la question 1 ($\alpha = \beta = 0$, $l = 10$ et $k = 200$). Expliquer, intuitivement, que cette condition est toujours vérifiée pour peu que le paramètre k soit suffisamment élevé. Autrement dit, pour peu que la demande pour le bien soit suffisamment élevée quel que soit le prix de marché p , la quantité échangée à l'équilibre est positive.

Dans la suite, on suppose que cette condition (4) est toujours vérifiée.

5.
 - Faire un graphique sur lequel vous représenterez la courbe d'offre et la courbe de demande et sur lequel vous ferez apparaître – après avoir déterminé leurs coordonnées – les points d'intersection des courbes d'offre et demande avec les axes de coordonnées.
 - Envisager l'effet d'une augmentation du paramètre α sur la figure précédente. Expliquer votre raisonnement. Que peut-on dire sur la quantité échangée et le prix à l'équilibre du marché suite à cette augmentation de α ?
 - Envisager l'effet d'une baisse du paramètre l sur la figure de la question 5(a). Expliquer votre raisonnement. Que peut-on dire sur la quantité échangée et le prix à l'équilibre du marché suite à cette baisse de l ?
 - Envisager l'effet d'une baisse du paramètre β sur la figure de la question 5(a). Expliquer votre raisonnement. Que peut-on dire sur la quantité échangée et le prix à l'équilibre du marché suite à cette baisse de β ?