

## DS de mathématiques 1

*La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, rappelez-vous qu'il n'est pas nécessaire de traiter la totalité des questions du sujet pour obtenir une bonne note.*

Les calculatrices et les documents sont interdits.

Durée : 1h

2024-2025

---

### PROBLÈME :

---

On va étudier l'équilibre sur un certain marché caractérisé par les fonctions d'offre et de demande suivantes :

$$\begin{aligned} - \text{ Pour l'offre : } & q_s = [5 + \alpha] p - l \\ - \text{ Pour la demande : } & q_d = - [10 - \beta] p + k \end{aligned} \quad (1)$$

Il est supposé en outre que les conditions suivantes sont vérifiées pour les paramètres  $\alpha, \beta, l$  et  $k$  qui interviennent dans l'équation 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha \\ 0 \leq \beta < 10 \\ 0 < l \\ 0 < k \end{array} \right. \quad (2)$$

Ces paramètres  $\alpha, \beta, l$  et  $k$  sont censés représenter les influences sur les quantités offertes et demandées exercées par des variables autres que le prix de marché  $p$ . Par exemple, si le revenu des ménages augmente, le paramètre  $k$  pourrait augmenter : quel que soit le prix de marché, la demande va augmenter. Une augmentation de la publicité ou un changement dans les goûts des consommateurs pourraient influencer le paramètre  $\alpha$ . Le coût des matières premières pourrait modifier  $\beta$  et des changements de taxes sur les produits importés (notamment le bien échangé sur le marché en question) pourraient modifier  $l$ .

**On appelle prix d'équilibre sur un marché, le prix pour lequel la quantité demandée est égale à la quantité offerte.**

1. **Dans cette question seulement**, on suppose que  $\alpha = \beta = 0$ ,  $l = 10$  et  $k = 200$ .
- Faire un graphique sur lequel vous représenterez la courbe d'offre et la courbe de demande et sur lequel vous ferez apparaître – après avoir déterminé leurs coordonnées – les points d'intersection des courbes d'offre et demande avec les axes de coordonnées.
  - Déterminer le prix d'équilibre sur ce marché. Quelle est alors la quantité échangée sur ce marché? Faites apparaître sur le graphique précédent la situation d'équilibre.

**Dans toute la suite de l'exercice, on revient au cas général.**

2. Montrer que la quantité d'équilibre  $q^*$  et le prix d'équilibre  $p^*$  s'expriment, en fonction des paramètres  $\alpha, \beta, l$  et  $k$ , de la manière suivante :

$$\begin{cases} p^* = \frac{l+k}{15+\alpha-\beta} \\ q^* = \frac{5+\alpha}{15+\alpha-\beta} \times (l+k) - l \end{cases} \quad (3)$$

3. Démontrer que compte tenu des conditions 2, on a nécessairement :

$$0 < \frac{5+\alpha}{15+\alpha-\beta} < 1$$

**Indication** : on pourra remarquer que :  $15 + \alpha - \beta = 10 - \beta + 5 + \alpha$ .

4. Démontrer que la quantité échangée sur le marché est positive si et seulement si :

$$\frac{5+\alpha}{15+\alpha-\beta} \geq \frac{l}{l+k} \quad (4)$$

Vérifier que cette condition 4 est vérifiée avec les hypothèse de la question 1 ( $\alpha = \beta = 0$ ,  $l = 10$  et  $k = 200$ ). Expliquer, intuitivement, que cette condition est toujours vérifiée pour peu que le paramètre  $k$  soit suffisamment élevé. Autrement dit, pour peu que la demande pour le bien soit suffisamment élevée quel que soit le prix de marché  $p$ , la quantité échangée à l'équilibre est positive.

**Dans la suite, on suppose que cette condition (4) est toujours vérifiée.**

5.
  - Faire un graphique sur lequel vous représenterez la courbe d'offre et la courbe de demande et sur lequel vous ferez apparaître – après avoir déterminé leurs coordonnées – les points d'intersection des courbes d'offre et demande avec les axes de coordonnées.
  - Envisager l'effet d'une augmentation du paramètre  $\alpha$  sur la figure précédente. Expliquer votre raisonnement. Que peut-on dire sur la quantité échangée et le prix à l'équilibre du marché suite à cette augmentation de  $\alpha$ ?
  - Envisager l'effet d'une baisse du paramètre  $l$  sur la figure de la question 5(a). Expliquer votre raisonnement. Que peut-on dire sur la quantité échangée et le prix à l'équilibre du marché suite à cette baisse de  $l$ ?
  - Envisager l'effet d'une baisse du paramètre  $\beta$  sur la figure de la question 5(a). Expliquer votre raisonnement. Que peut-on dire sur la quantité échangée et le prix à l'équilibre du marché suite à cette baisse de  $\beta$ ?