TD 04 : Variables aléatoires continues

Les objectifs de cette fiche

☑ Connaitre les caractéristiques essentielles d'une densité de probabilité

☑ Savoir calculer une probabilité associée à une variable aléatoire continue

☑ Comparer différentes modélisations

Exercice 1

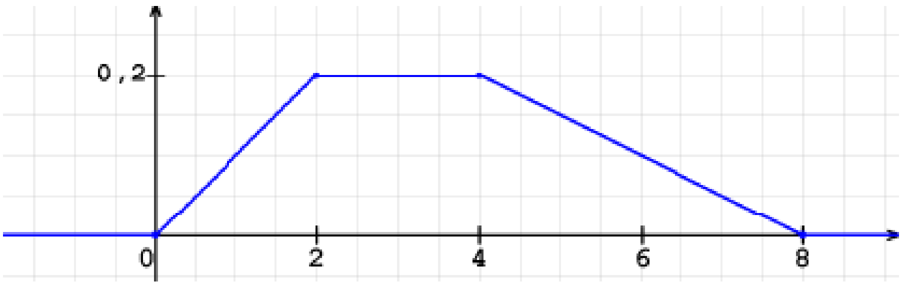
Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi uniforme sur $[0\ ;\ 4]$, c'est-à-dire ayant pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0,25 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la densité de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer les probabilités suivantes :
   (a) $P(X \leqslant 1)$
   (b) $P(X > 3,5)$
   (c) $P(1,3 \leqslant X \leqslant 2,7)$
   (d) $P(X > 5)$
3. Représenter graphiquement la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

Exercice 2

À un standard téléphonique d'un fournisseur d'accès à internet, le temps d'attente, exprimé en minutes, est modélisé par une variable aléatoire continue X dont la densité f est donnée par la représentation graphique ci-dessous.

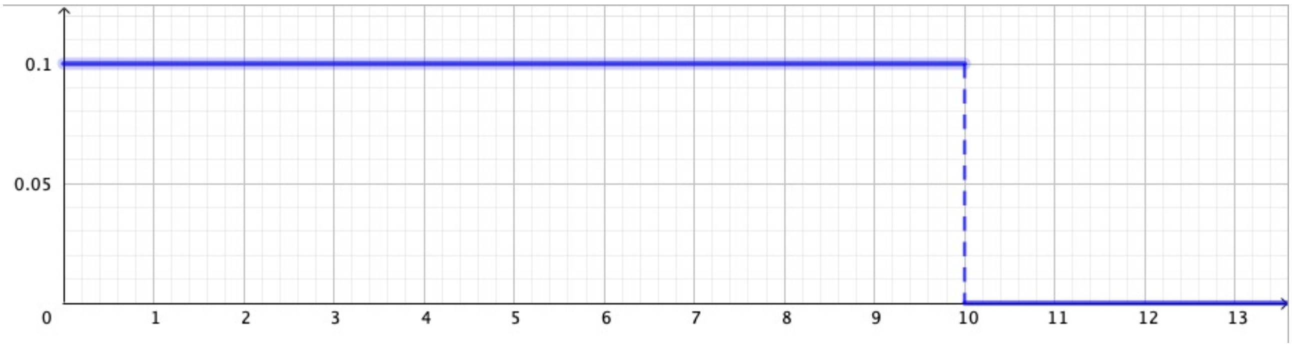


1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Calculer les probabilités suivantes :
   (a) $P(X \leqslant 1)$
   (b) $P(1.5 \leqslant X \leqslant 2.5)$
   (c) $P(X \geqslant 4)$

Exercice 3

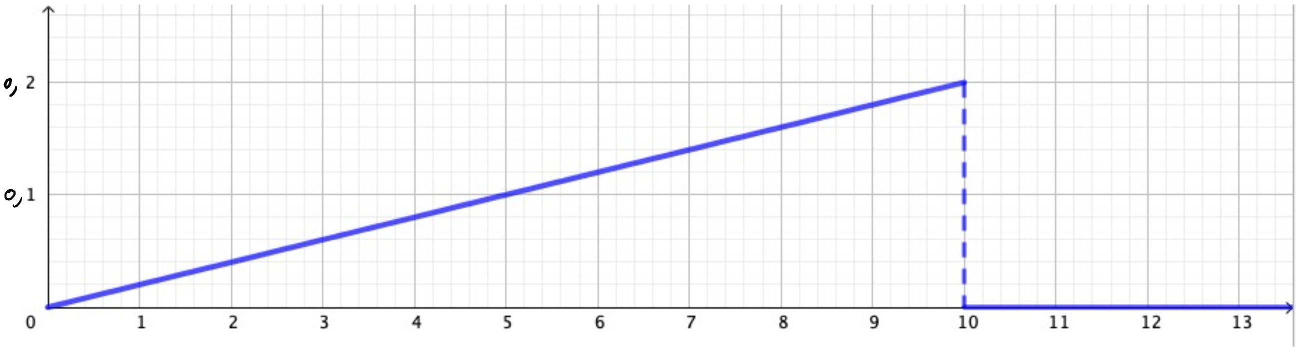
Le service après-vente d'une grande marque met à disposition de ses clients un numéro d'appel.
Lorsqu'un client appelle, il est mis en attente jusqu'à ce qu'un conseiller puisse lui répondre.
Si jamais aucun conseiller n'a pu lui répondre avant 10 minutes, la communication est coupée.
On note X la variable aléatoire qui à un appel fait correspondre le temps d'attente, en minutes, du client.
L'objectif est d'étudier et de comparer trois modélisations différentes.

Modèle 1 : La v.a. X a pour densité la fonction f définie sur $[0,10]$ par $f(x) = 0,1$.



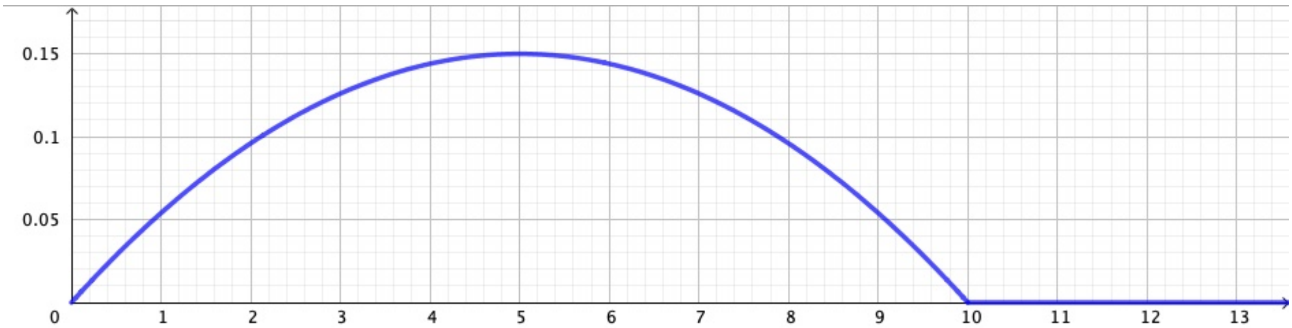
1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Calculer $P(X \leqslant 5)$, $P(X < 7)$, $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$, $P(X > 5.5)$.

Modèle 2 : La v.a. X a pour densité la fonction f définie sur $[0,10]$ par $f(x) = 0,2x$.



1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Calculer $P(X \leqslant 5)$, $P(X < 7)$, $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$, $P(X > 5.5)$.

Modèle 3 : La v.a. X a pour densité la fonction f définie sur $[0,10]$ par $f(x) = -0,006\,(x-5)^2 + 0,15$



1. Vérifier que f est une densité de probabilité. (*On pourra l'admettre et/ou le vérifier à l'aide d'un logiciel.*)
2. On donne ci-après un extrait de la table de valeurs de la fonction de répartition de la v.a. X.

Table de valeurs de la fonction de répartition de la v.a. X

t	0,0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0	0	0.001	0.003	0.005	0.007	0.01	0.014	0.018	0.023
1	0.028	0.034	0.04	0.046	0.053	0.061	0.069	0.077	0.086	0.095
2	0.104	0.114	0.124	0.134	0.145	0.156	0.168	0.179	0.191	0.204
3	0.216	0.229	0.242	0.255	0.268	0.282	0.295	0.309	0.323	0.338
4	0.352	0.366	0.381	0.396	0.41	0.425	0.44	0.455	0.47	0.485

À l'aide de cette table, déterminer $P(X \leq 2,3)$, $P(2 \leq X \leq 3)$