TD 03 : Variables aléatoires discrètes

Les objectifs de cette fiche

- ☑ Comprendre la notion de variable aléatoire
- ☑ Comprendre la notion d'espérance et d'écart-type d'une variable aléatoire
- ☑ Savoir reconnaitre les modèles usuels de lois discrètes (uniforme, binomiale, géométrique)
- ☑ Savoir calculer des probabilités pour des VA suivant une loi discrète usuelle (uniforme, binomiale, géométrique)
- ☑ Savoir calculer l'espérance et l'écart-type d'une VA suivant une loi discrète usuelle (uniforme, binomiale, géométrique)

Fonction de répartition

Si X est une variable aléatoire, la fonction de répartition de X est la fonction F définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x), \text{pour tout nombre réel } x$$

Espérance, variance, écart-type

Si X est une variable aléatoire discrète :

Espérance : $E(X) = \sum (x_i \cdot p_i)$ (moyenne des valeurs possibles, pondérées par leur probabilités)

Variance : $V(X) = \sum \left((x_i - E(X))^2 \cdot p_i\right) = E(X^2) - (E(X))^2$

(espérance des carrés des valeurs possibles $-$ carré de l'espérance)

Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Propriété : $E(aX+b) = aE(X)+b$ et $V(aX+b) = a^2V(X)$

LOI	Notation	Contexte d'utilisation	$P(X=k)$	Espérance	Variance
Loi uniforme	$X \sim U([1\,;n])$	Equiprobabilité	$\frac{1}{n}$	$E(X) = \frac{n+1}{2}$	$V(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernoulli	$X \sim B(1\,;p)$	« Succès/échec »	$P(X=1)=p$ *et* $P(X=0)=1-p$	$E(X)=p$	$V(X)=p(1-p)$
Loi géométrique	$X \sim G(p)$	Rang du 1er succès	$(1-p)^{k-1} \times p$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$
Loi binomiale	$X \sim B(n\,;p)$	Nb de succès lors de n tirages avec remises	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$E(X) = n \times p$	$V(X) = n \times p \times (1-p)$

Somme des termes d'une suite géométrique

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\textit{Exemple} : 1 + 0,6 + 0,6^2 + \ldots + 0,6^8 = \frac{1-0,6^9}{1-0,6} \approx 2,475$$

Exercice 1

Un jeu consiste à lancer trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On gagne 2€ pour chaque PILE obtenu et on perd 1€ pour chaque FACE obtenue.

1. Décrire l'univers des possibilités de cette expérience aléatoire.
2. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de la variable aléatoire X égale au gain du joueur lors d'une partie. Représenter graphiquement la loi de X ainsi que sa fonction de répartition F.
3. Calculer l'espérance de X, et interpréter le résultat.
4. Calculer la variance et l'écart-type de X.

Exercice 2

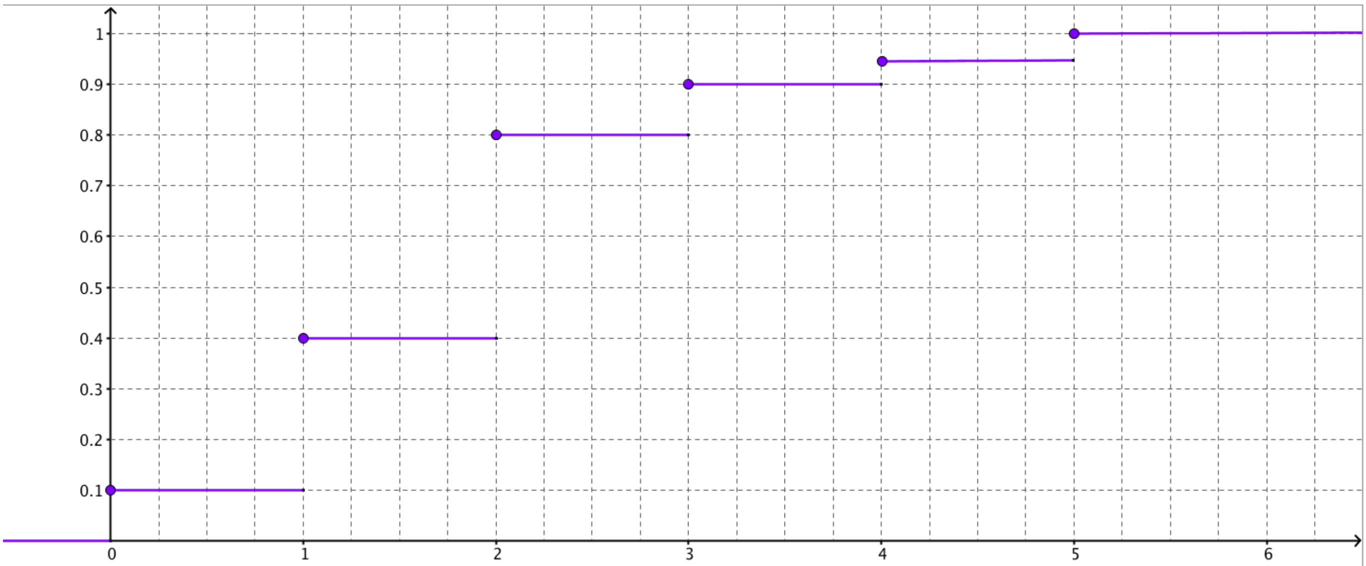
Soient a et b deux nombres réels. On donne ci-après le tableau de loi d'une variable aléatoire X dont l'espérance $E(X)$ vaut 4.

x_i	2	3	a
$p_i = P(X = x_i)$	0,5	b	0,3

1. Déterminer les valeurs de a et b.
2. Déterminer la variance et l'écart-type de X.
3. Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire dont on donne ci-après la représentation graphique de la fonction de répartition.



1. Reconstruire le tableau de loi de la variable aléatoire X.
2. Déterminer les probabilités suivantes : $P(X < 4,5)$, $P(X > 2)$ et $P(3 \leqslant X \leqslant 4,5)$.
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 4

On note X la variable aléatoire égale au gain d'un joueur à un certain jeu d'argent. On suppose que la loi de X est donnée par le tableau :

x_i	-20	-10	10	20
p_i	0,3	0,2	0,4	0,1

1. A-t-on intérêt à jouer à ce jeu ?
2. Calculer la variance et l'écart-type de X.
3. Que deviennent les réponses aux questions précédentes si tous les x_i sont multipliés par 10 ?

Exercice 5

On modélise le nombre d'employés absents un jour donné dans une certaine entreprise par une VA X suivant la loi uniforme discrète sur $[\![0\ ;\ 8]\!]$

1. Décrire et représenter cette loi de probabilité théorique.
2. Quelle est la probabilité pour que demain, on observe au plus 3 employés absents ?
3. En moyenne, à combien d'absents peut-on s'attendre un jour donné ?
4. Quel est l'écart-type du nombre d'absents quotidiens ?

Exercice 6

Une urne opaque contient 5 boules rouges et 10 boules bleues, indiscernables au toucher.

1. On tire 4 boules successivement avec remise, et on note X le nombre de boules rouges obtenues. Donner la loi de X, son espérance et son écart-type, puis calculer $P(X = 3)$ et $P(X \geqslant 1)$.
2. On effectue des tirages avec remise jusqu'à ce qu'on obtienne une boule rouge, et on note Y le nombre de tirages effectués. Donner la loi de Y, son espérance et son écart-type, puis calculer $P(Y = 3)$ et $P(Y \geqslant 1)$.

Exercice 7

Un groupe de TD comporte 30 étudiants dont 18 filles. À chaque cours de maths, le professeur interroge au hasard un étudiant du groupe sans se rappeler lesquels il a déjà interrogés.

1. On considère dix séances de TD de maths consécutives et on note X le nombre de filles interrogées sur l'ensemble de ces 10 séances.
   (a) Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance et son écart-type.
   (b) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 5 filles interrogées.
   (c) Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 2 filles interrogées.
2. Quel doit être le nombre minimal de séances de TD de maths pour que la probabilité qu'au moins une fille soit interrogée soit supérieure à 99,9% ?

Exercice 8

On considère une maladie dont 5% des personnes atteintes ne guérissent pas. On observe trois malades.

1. Quelle est la probabilité que les trois patients guérissent ?
2. Quelle est la probabilité qu'aucun ne guérissent ?
3. Quelle est la probabilité qu'au moins un des trois patients guérisse ?

Exercice 9

On lance un dé idéal jusqu'à ce que l'on obtienne un six, puis on s'arrête. On note X le nombre de lancers effectués.

1. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et son écart-type.
2. Calculer $P(X = 6)$.
3. Calculer $P(X \geqslant 6)$.

Exercice 10

Un groupe électrogène de secours est muni d'un démarreur automatique qui se met en route de la façon suivante : il se met en route au bout d'une seconde avec une probabilité de réussite de 0,60. Dans le cas contraire, le démarreur se coupe et il attend quatre secondes avant de recommencer. Les résultats des différentes tentatives sont indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tentatives nécessaires pour que le groupe se mette en route. On note T la variable aléatoire égale au temps, exprimé en secondes, nécessaire pour que le groupe se mette en route.

1. Donner la loi de X, son espérance, son écart-type.
2. Exprimer T en fonction de X et en déduire l'espérance et l'écart-type de T.

Exercice 11

Un joueur joue à un jeu de hasard où la chance de gagner à chaque partie est de 10%. Il décide de rejouer tant qu'il perd et de s'arrêter la première fois qu'il gagne. Pour essayer de minimiser ses pertes, ce joueur décide de miser 2€ à la première partie puis d'augmenter sa mise de 50% à chaque partie suivante.

1. Quelle est la probabilité qu'il gagne au bout de neuf parties ?
2. Dans ce cas, combien aura-t-il misé au total ?
3. Quelle est la probabilité qu'il perde au moins dix parties ?

Notes ou brouillon