TD 02 : Conditionnement et indépendance

Les objectifs de cette fiche

☑ Connaitre la définition d'une probabilité conditionnelle

☑ Savoir appliquer la formule des probabilités totales

☑ Comprendre le lien entre probabilités conditionnelles et arbre pondéré

☑ Connaitre la définition d'événements indépendants

Probabilités conditionnelles

Définition : Probabilité de B sachant que A est réalisé :

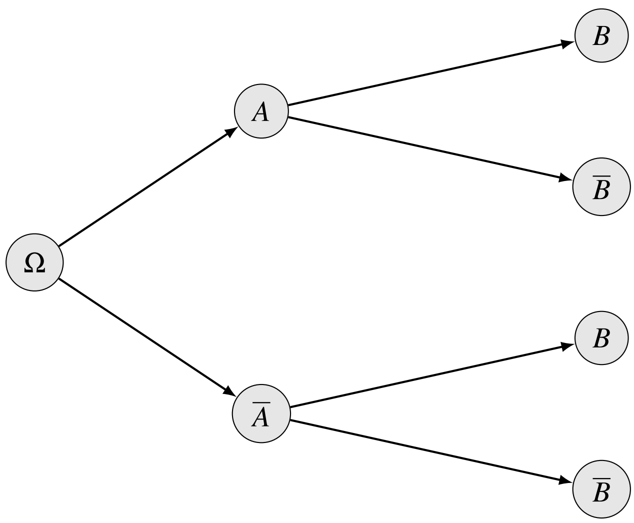
$P_A(B) =$

Conséquence : Probabilité de $A \cap B$:

$P(A \cap B) =$

Formule des probabilités totales (cas particulier)

$P(B) =$



Indépendance

Définition : On dit que deux événements A et B sont **indépendants** lorsque $P_B(A) = P(A)$, autrement dit lorsque :

Propriété : Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi, tout comme A et $\overline{B}$, tout comme $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Attention !

Ne pas confondre événements **indépendants** (voir définition ci-dessus), et événements **incompatibles** (c'est à dire ne se réalisant pas en même temps, c'est à dire tels que $P(A \cap B) = 0$)

L'égalité $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ est toujours vraie,
mais l'égalité $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ n'est vraie que lorsque A et B sont indépendants !!

Exercice 1

Pour prévenir deux défectuosités A et B de pièces fabriquées, on soumet la production à des tests. D'après ceux-ci :

- 8% présentent le défaut A ;
- parmi les pièces présentant le défaut A, 15% ont aussi le défaut B ;
- parmi les pièces non atteintes de A, 5% ont le défaut B.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce ait les deux défauts.
2. Calculer la probabilité qu'une pièce ait le défaut B seulement.
3. En déduire la probabilité qu'une pièce présente le défaut B, puis la probabilité qu'une pièce soit sans défaut.
4. Les défauts A et B sont-ils indépendants ?
5. On trouve par hasard une pièce présentant le défaut B. Quelle est la probabilité qu'elle présente aussi le défaut A ?

Exercice 2

A et B sont deux événements d'un univers tels que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$, et $P(A \cup B) = 0,44$.
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 3

Lors de la fabrication de pièces en série, 10% ont le défaut A et 8% ont le défaut B. On suppose que ces deux défauts surviennent indépendamment l'un de l'autre. Une pièce est prise au hasard et on s'intéresse au nombre de défaut qu'elle présente.

1. Déterminer la probabilité que la pièce ait les deux défauts.
2. Déterminer la probabilité que la pièce ait *au moins* un défaut.
3. Déterminer la probabilité que la pièce ait exactement un défaut.
4. Déterminer la probabilité que la pièce n'ait aucun défaut.

Exercice 4

On lance deux fois un dé cubique équilibré.

1. Sachant que le premier lancer est un six, quelle est la probabilité que le second soit un six ?
2. Sachant qu'un des lancers est un six, quelle est la probabilité que l'autre soit aussi un six ?

Exercice 5 D'après épreuve de Score IAE-Message, 2018

De 2000 à 2016, l'équipe de France de basket gagnait 7 matchs sur 10 lorsque Tony Parker jouait, et seulement 40% de ses matchs quand il ne jouait pas. On précise qu'il ne peut y avoir de matchs nuls (à égalité) au basket à ce niveau, car il y aura toujours prolongation jusqu'à victoire d'une des deux équipes. Sachant qu'il a joué 8 matchs sur 10 de l'équipe de France lors de cette période, et que la France a battu l'Espagne 80 à 66 lors de l'Euro 2013, quelle est la probabilité que Tony Parker ait joué ce match ?

Exercice 6

Une société de vente emploie trois transporteurs : Alavavite, Bontempo et Cestparti pour faire livrer ses colis. Elle utilise le transporteur Alavavite les 3/4 du temps et une fois sur 8 chacun des deux autres. Chaque transporteur égare respectivement 1%, 2% et 3% des colis qui lui sont confiés.
Un client se plaint de ne pas avoir reçu sa commande. Quelle est la probabilité que le transporteur Alavavite soit le responsable ? Commenter le résultat.

Exercice 7

Une maladie contagieuse atteint un quart de la population. Parmi les malades il y a un vacciné pour 4 non-vaccinés. Parmi les vaccinés une personne sur douze est malade. Déterminer la proportion des vaccinés dans la population. De quel pourcentage la vaccination diminue-t-elle la probabilité d'être atteint par cette maladie ?

Exercice 8

Une usine d'embouteillage vient d'acquérir deux soustireuses (machines) notées S_1 et S_2.
La soutireuse S_1 remplit 14 000 bouteilles par heure, contre 20 000 bouteilles par heure pour la soutireuse S_2.
Chaque heure, les bouteilles sont empaquetées puis expédiées.
Une étude interne a montré que 1% des bouteilles remplies par la soutireuse S_1 ne sont pas conformes en termes de niveau de remplissage, tout comme 0,5% des bouteilles remplies par la soutireuse S_2.
On choisit au hasard une bouteille remplie dans cette usine.
On note C l'événement : "*La bouteille est conforme (c'est à dire remplie correctement)*".

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité qu'une bouteille remplie dans cette usine ne soit pas remplie correctement ?
3. Après plusieurs plaintes de clients, le service des fraudes intervient pour effectuer un test de conformité de remplissage. Le contrôleur, très pressé, choisit une bouteille au hasard. Hélas cette bouteille n'est pas conforme. Quelle est la probabilité que cette bouteille provienne de la soutireuse S_1 ?

Exercice 9 Une enquête délicate

La gestion d'associations par des étudiants est une chose fréquente au sein notamment des écoles de commerces. Certaines disposent de budgets conséquents, et organisent des manifestations sportives, festives, etc. Quelques accidents graves survenus lors de soirées conduisent à s'interroger sur les risques encourus à laisser des étudiants organiser des manifestations réunissant plusieurs centaines d'individus. Un des facteurs de risque est la consommation de drogue et en particulier, celle d'ecstasy.
Dans ce contexte, le directeur d'une école de commerce souhaite savoir si cette consommation est marginale parmi ses étudiants.
Un moyen d'évaluer ce risque est d'interroger les étudiants... à condition de leur garantir l'anonymat.
Pour ce faire, le directeur de l'école songe à l'introduction du hasard dans le protocole du sondage.
Il décide de demander à chaque étudiant de s'isoler et de jouer à pile ou face avec une pièce de monnaie équilibrée, de la manière suivante :

- S'il obtient pile, il doit répondre à la question suivante : "*Avez-vous un jour consommé de l'ecstasy ?*".
- S'il obtient face, il doit rejouer et répondre à la question : "*Avez-vous obtenu face lors du second lancer ?*".

L'étudiant donne ensuite sa réponse sous forme d'un papier où est inscrit soit "OUI", soit "NON".
Le directeur a donc décidé de mettre en place une telle enquête : sur les 200 étudiants de cette école présents à la cafétéria lors du sondage, 53 ont répondu par un bulletin OUI.

1. Expliquez en quoi cette méthode de sondage garantit *a priori* l'anonymat à l'étudiant qui accepte de s'y soumettre.
2. Estimez la proportion des étudiants de cette école ayant un jour consommé de l'ecstasy. (*On s'aidera d'un arbre faisant apparaitre toutes les issues possibles de cette expérience aléatoire.*)
3. Discutez des raisons précises qui font que la proportion obtenue à la question précédente n'est qu'une estimation. (*Donner plusieurs raisons.*)
4. Expliquez pourquoi l'anonymat n'est pas garanti si 75% des étudiants répondent OUI.
5. Que conclure si 20% des étudiants répondent OUI ?..

Notes ou brouillon