

Le modèle de Hardy-Weinberg

Enseignement Scientifique - Terminale

Évolution génétique des populations

Au cours de l'évolution biologique, la composition génétique d'une espèce change de génération en génération. Cependant, le modèle de Hardy-Weinberg prévoit que la structure d'une population reste stable d'une génération à une autre dans certaines conditions. Tout écart par rapport aux résultats de l'équilibre de Hardy-Weinberg est dû aux effets de forces évolutives.

1. Le modèle de Hardy-Weinberg

Le modèle de Hardy-Weinberg prédit le maintien des fréquences des allèles au cours des générations. Cette stabilité est appelée l'équilibre de Hardy-Weinberg.

Un gène hérité de parents peut exister sous plusieurs formes (avec des allèles différents).

- *Génotype* : composition allélique de l'ensemble des gènes d'un individu.
- *Homozygote* : individu qui possède deux allèles identiques pour un même gène.
- *Hétérozygote* : individu qui possède deux allèles différents pour un même gène.

Certaines allèles sont *dominantes* et s'expriment alors que d'autres sont *récessives*.

1. Définitions

La **fréquence génotypique** donne les proportions des différentes combinaisons alléliques possibles (i.e. génotypes).


$$f(\text{génotype}) = \frac{\text{Nombre d'individus de ce génotype}}{\text{Nombre d'individus}}$$

La **fréquence allélique** donne la proportion de chaque allèle. Chez une espèce à deux chromosomes, on a, pour un gène donné, deux fois plus d'allèles que d'individus.




$$f(\text{allélique}) = \frac{\text{Nombre total de l'allèle donné}}{2 \times \text{Nombre d'individus}}$$

2. Document

Document – La couleur des fleurs



La couleur des fleurs est gouvernée par un seul gène qui possède deux allèles : A et a codominants.

Phénotypes			
Effectif	164	192	44
Fréquence des phénotypes			
Génotypes des individus	AA	Aa	aa
Fréquence des allèles	Fréquence p de l'allèle A $p =$		Fréquence q de l'allèle a $q =$
	$p + q =$		

▲ Résultat d'un échantillonnage de 400 fleurs dans une prairie et calculs des fréquences phénotypiques et alléliques donnant la structure génétique de la population

Questions :

- Rappeler la différence entre *génotype* et *phénotype*.
- Compléter le tableau ci-dessus en déterminant les différentes fréquences phénotypiques (ou génotypiques) et alléliques.
- Justifier et vérifier que $f(A) = f(A//A) + \frac{1}{2}f(A//a)$ et en déduire $f(a)$.

3. Modèle de Hardy-Weinberg

Ce modèle a été énoncé indépendamment au début du XXe siècle par le mathématicien anglais Godfrey Harold Hardy et par le médecin allemand Wilhem Weinberg.

Le modèle de Hardy-Weinberg permet d'estimer les fréquences alléliques et génotypiques des générations futures pour un gène à deux allèles dans une population.

Dans cette population, l'allèle A a une fréquence p et l'allèle a une fréquence $q = 1 - p$. Ce modèle s'applique lorsqu'un ensemble d'hypothèses est vérifié :

- une grande population (loi des grands nombres);
- la panmixie (reproduction aléatoire des individus) ;
- l'absence de forces évolutives (migration, mutation, sélection naturelle, dérive génétique).

À l'**équilibre** de Hardy-Weinberg, on peut utiliser le *tableau de croisement* ci-contre, afin de calculer les probabilités des génotypes à partir de la génération 1 en connaissant les fréquences alléliques de la génération 0 (initiale).

	Allèle A (fréq. p)	Allèle a (fréq q)
Allèle A (fréq. p)	A//A (p^2)	A//a (pq)
Allèle a (fréq. a)	a//A (pq)	a//a (q^2)

Quelle que soit la répartition des génotypes dans la population de départ, cette répartition devient **stable dès la 2e génération**. (voir activité spé Maths).

La fréquence allélique restant par ailleurs constante quelle que soit la génération considérée, on pourra donc utiliser comme **probabilité génotypique à l'équilibre** :

$$f_{HW}(A//A) = p^2 \quad f_{HW}(A//a) = 2pq \quad f_{HW}(a//a) = q^2$$

où la fréquence allélique est déterminée à partir d'une génération quelconque :

$$p = f(A//A) + \frac{1}{2}f(A//a)$$
$$q = f(a//a) + \frac{1}{2}f(A//a)$$

Remarque La somme des fréquences génotypique étant nécessairement égale à 1, on a : $p^2 + 2pq + q^2 = 1$.

3. Activité

Différentes couleurs de fourrures

On a réintroduit une population de loup dans un Parc National. Cette population présente deux couleurs de fourrure : noire ou grise. On sait que la couleur de la fourrure est contrôlée par un gène qui existe sous deux formes (allèle) : A ou a. L'allèle A étant dominante sur a, les loups de génotype A//A et A//a sont noirs tandis que les loups de génotype a//a sont gris.



Tableur – modélisation de l'évolution génétique

	A	B	C	D	E	F
1	Génération 0	Génotype A//A	Génotype A//a	Génotype a//a	Total	
2	Effectifs:	40	420	540	1000	
3						
4	Fréquences génotypiques (évolution de génération en génération)					
5	génération	0	1	2	3	4
6	A//A	0,04	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625
7	A//a	0,42	0,375	0,375	0,375	0,375
8	a//a	0,54	0,5625	0,5625	0,5625	0,5625
9						
10	Fréquences alléliques					
11	A	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
12	a	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75
13						
14	Equilibre HW			Pour	2000	naissances:
15	A//A	0,0625		A//A	125	
16	A//a	0,375		A//a	750	
17	a//a	0,5625		a//a	1125	

Questions

- Indiquer les conditions sous lesquelles on peut prédire les fréquences génotypique de la génération 1 à partir des fréquences alléliques de la génération 0. Ces conditions vous semblent-elles réalistes ?
- Identifier les cases dans lesquelles les formules suivantes ont été utilisées :
 - $a. = C2/E\$2$
 - $b. = C6 + C7/2$
 - $c. = 1 - B11$
 - $d. = 2 * B11 * B12$
 - $e. = B15 * E\$14$
- Justifier que l'équilibre d'Hardy-Weinberg n'était pas réalisé en génération 0. (préciser les effectifs qu'on devrait observer).
- On observe une stabilité des fréquences au delà de la seconde génération, montrer qu'en utilisant les fréquences génotypique d'équilibre (f_{HW}) les fréquences alléliques sont constantes de génération en génération (indication : utiliser que $q = 1 - p$).
- Pour l'exemple du cours, sur les fleurs rouges, roses et blanches : montrer que les effectifs relevés sont ("presque") à l'équilibre de Hardy-Weinberg.

4. Exercices

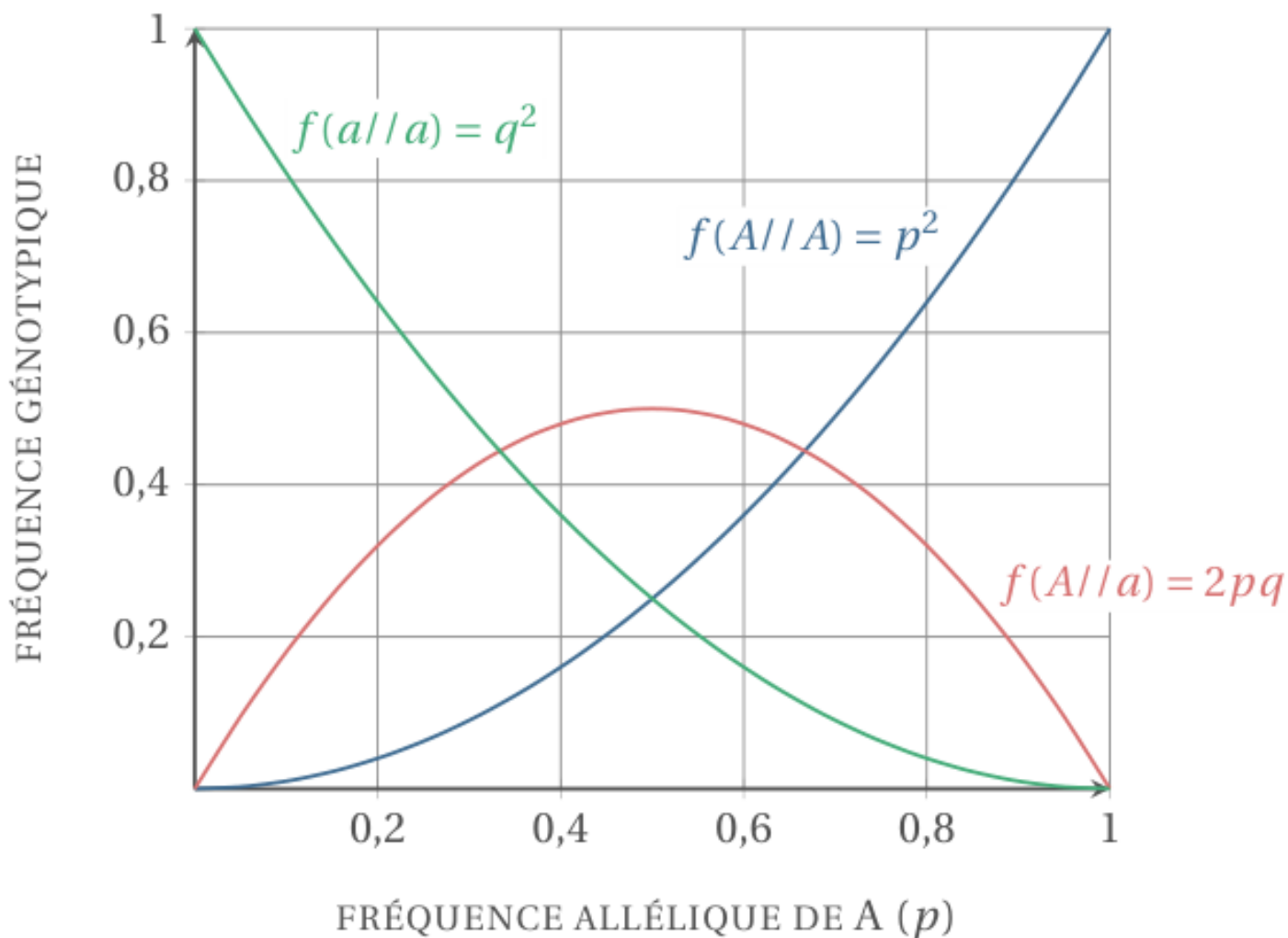
Exercice 1 : Vrai / Faux

Lorsqu'une population est à l'équilibre de Hardy-Weinberg on peut déterminer la fréquence génotypique en connaissant la fréquence allélique. Le graphique ci-contre résume la relation entre ces deux fréquences (rappel $q = 1 - p$).

D'après ce graphique :

- la fréquence des individus A//a est la plus élevée lorsque la fréquence q vaut 0.5.
- lorsque la fréquence q est inférieure à 0,3, il y a plus d'individus A//a que d'individus A//A.
- il n'existe aucune fréquence p pour laquelle les fréquences des génotypes A//A et A//a sont identiques.
- lorsque q vaut 1, il n'y a que des individus du génotype a//a.

L'équilibre de Hardy-Weinberg



Exercice 2

1. Dans la population, à l'équilibre de Hardy-Weinberg, décrite dans le tableau ci-dessous, quelle est la fréquence p de l'allèle A ?

Génotype	AA	Aa	aa
Fréquence	0.36	0.48	0.36

2. Pour un gène possédant deux allèles A et a, avec $f(A) = 0,6$, à l'équilibre de Hardy-Weinberg, quelle est la proportion d'hétérozygotes Aa ?

Exercice 3 - Albinisme

Chez les humains, on considère que le gène de la pigmentation de la peau est présent sous la forme de deux allèles : l'allèle A dominant et l'allèle a responsable de l'albinisme chez les homozygotes a//a.

Des recherches montrent que la fréquence relative de l'allèle a est $q = 0,005$.

1. Calculer la fréquence p de l'allèle A.
2. En supposant que la population est à l'équilibre de Hardy-Weinberg pour ce gène, calculer la fréquence relative des hétérozygotes A//a, porteurs sains du caractère d'albinisme.

Effectuer et contrôler des calculs, présenter une démarche de manière argumentée

Gène de la calpastatine chez le mouton



Le gène de la calpastatine (*cast*) a un effet majeur sur la croissance musculaire et la tendreté de la viande après l'abattage. Il est situé sur le cinquième chromosome chez le mouton. Deux allèles, M et N, ont été identifiés pour ce gène, l'allèle M provoquant une croissance plus importante des moutons. Certaines populations de moutons ont subi une sélection pour obtenir des moutons de poids plus important. Il a été démontré que les moutons de génotypes NN avaient le plus souvent un poids inférieur aux moutons des autres génotypes. Des échantillons de sang ont été prélevés sur 720 animaux au total provenant des populations de moutons de Kivircik (KIV) et Karacabey Merino (KM) en Turquie.

Races de moutons	Génotypes			Total
	MM	MN	NN	
KIV	245	79	12	336
KM	166	65	17	248

D'après Yılmaz et al, 2014.

QUESTION

À partir de ces données, montrez que l'une de ces populations n'est pas à l'équilibre de Hardy-Weinberg et expliquez les raisons probables de cet écart.

AIDE

1. Je calcule les fréquences alléliques pour chacune des populations
2. À partir des fréquences alléliques, je calcule les fréquences génotypiques théoriques dans le cas où l'équilibre de Hardy-Weinberg est respecté.
3. Je compare les fréquences génotypiques théoriques et observées afin de conclure.
4. Je cherche dans l'énoncé quel principe de Hardy-Weinberg n'est pas respecté.

5. Activité : spé maths

ÉVOLUTION GÉNÉTIQUE ET ÉQUILIBRE DE HARDY-WEINBERG

Dans les cas simples, un gène peut prendre deux formes (ou allèles) A et a. Chaque gène se trouvant en deux exemplaires, un individu peut donc présenter l'un des trois génotypes suivants : A//A, A//a ou a//a. Un enfant hérite d'un allèle de chacun de ses parents, chaque allèle étant choisi au hasard. Ainsi, si l'un des parents est de type A//A et l'autre de type A//a, alors l'enfant peut être de type A//A ou A//a.

On admettra que, dans ce modèle théorique, les couples ont la même capacité de reproduction et qu'ils se forment au hasard indépendamment de leurs génotypes, que l'environnement est stable et que la population est suffisamment grande pour être considérée comme infinie.

Pour tout entier naturel n , on note G_n la population à la génération n et,

- u_n, v_n et w_n les proportions respectives des génotypes A//A, A//a et a//a dans G_n avec $u_n + v_n + w_n = 1$
- p_n et q_n les proportions respectives des allèles A et a dans G_n avec $p_n + q_n = 1$.

On se propose d'étudier l'évolution de ces différentes proportions au cours des générations.

A. Lien entre les proportions dans G_n

Soit n un entier naturel. On choisit au hasard un allèle parmi ceux de la population G_n .

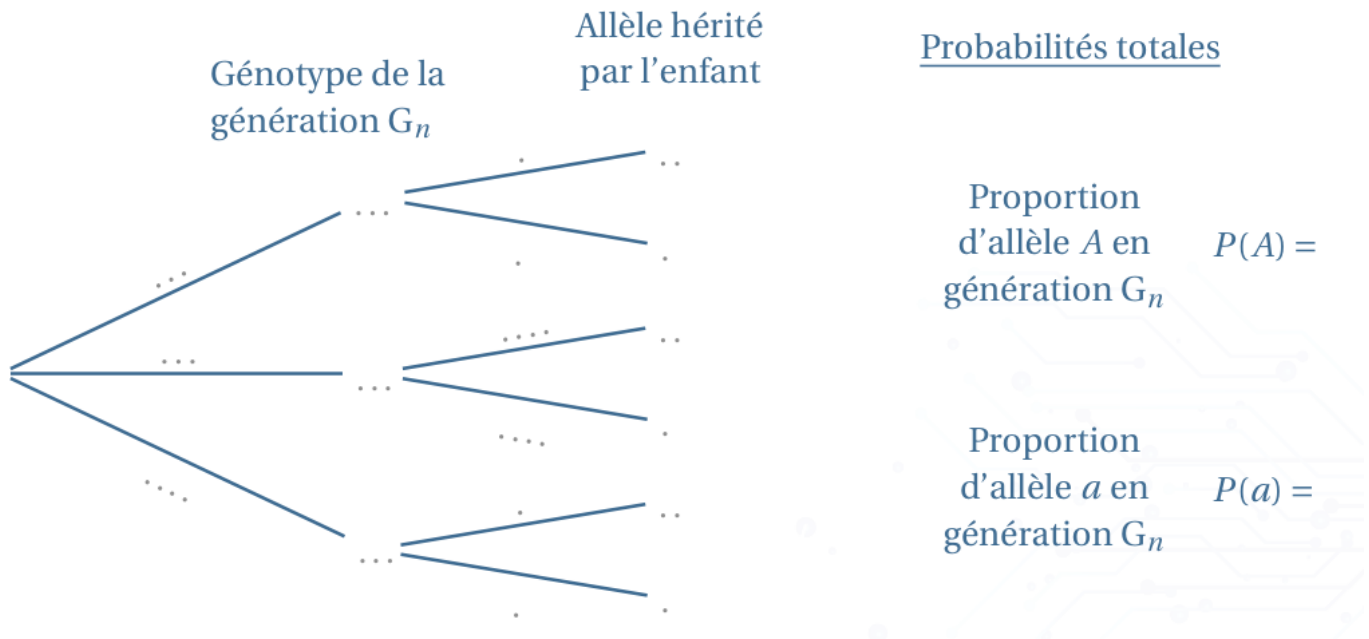
On note :

- A l'évènement : « l'allèle est du type A »; a l'évènement : « l'allèle est du type a »;
- AA l'évènement : « l'allèle provient d'un individu de génotype A//A »; Aa l'évènement : « l'allèle provient d'un individu de génotype A//a »;

- aA l'évènement : « l'allèle provient d'un individu de génotype $a//A$ »; aa l'évènement : « l'allèle provient d'un individu de génotype $a//a$ ».

On a alors pour tout entier naturel n , $P(A) = p_n$, $P(a) = q_n$, $P(AA) = u_n$, $P(Aa) = v_n$ et $P(aa) = w_n$.

1. Déterminer toutes les probabilités conditionnelles du type $P_{AA}(A)$, $P_{AA}(a)$, $P_{Aa}(A)$, etc.
2. Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous, en faisant intervenir les évènements A , a , AA , Aa et aa :



3. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel n ,

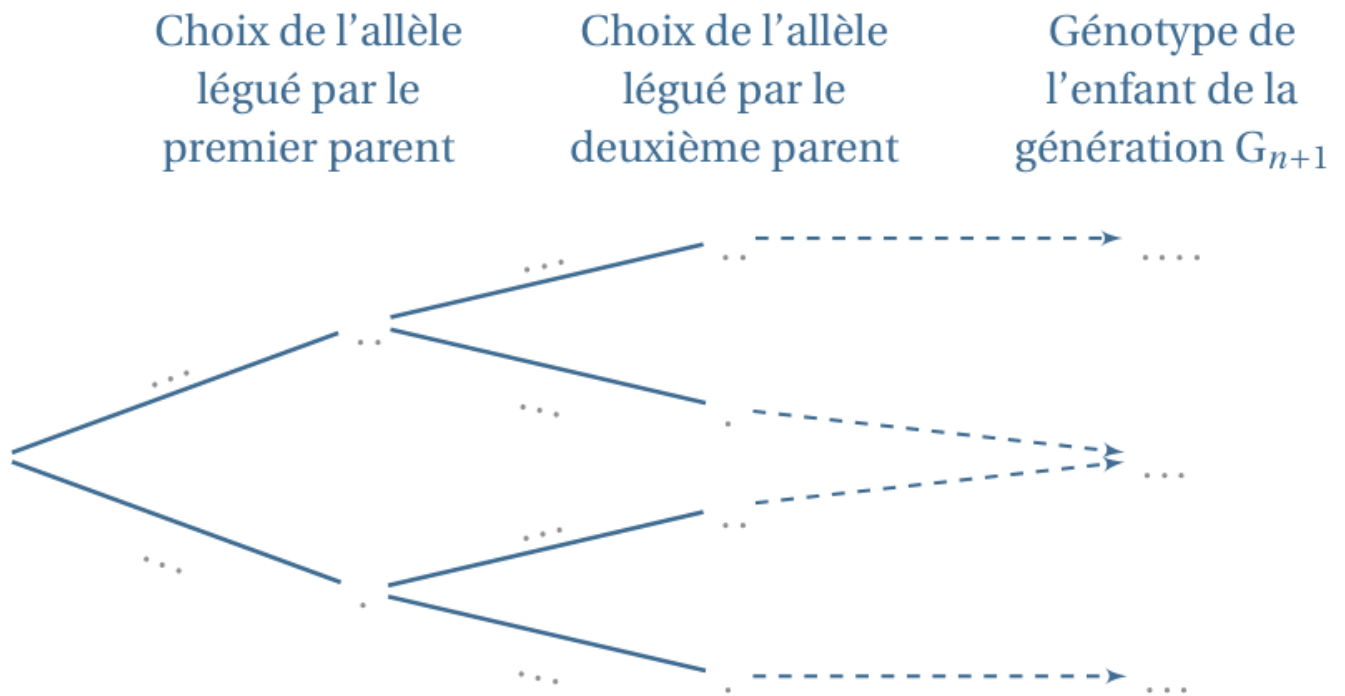
$$p_n = u_n + \frac{1}{2}v_n \quad \text{et} \quad q_n = w_n + \frac{1}{2}v_n$$

B. D'une génération à la suivante

Soit n un entier naturel. On considère que la population G_{n+1} est constituée uniquement des enfants issus des couples formés en G_n .

On choisit au hasard un enfant dans la population G_{n+1} .

1. Compléter l'arbre suivant afin de déterminer les probabilités génotypique de la génération suivante :



2. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = p_n^2$, $w_{n+1} = q_n^2$ puis que $v_{n+1} = 2p_nq_n$

C. Étude des suites

1. Dans cette question, on pose : $u_0 = 0,7$; $v_0 = 0,2$ et donc $w_0 = 0,1$. Calculer les 5 premiers termes des suites u, v, w, p et q (on pourra utiliser les outils de calculatrice adaptés).
2. Reprendre les calculs précédents en choisissant d'autres valeurs initiales de u_0 et v_0 .
Émettre une conjecture sur le comportement de chacune de ces suites.
3. Montrer que pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = p_n$ et $q_{n+1} = q_n$.
4. En déduire le comportement des suites p et q puis celui des suites u, v et w .
5. Justifier l'utilisation de loi génétique d'Hardy-Weinberg caractérisant ce modèle de population.