Multiples, diviseurs et nombres premiers

Table des matières

1 Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$

1.1 Rappels : Ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Définition 1.
- L'ensemble des entiers **naturels** $\{0, 1, 2, \ldots\}$ est noté $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des entiers **relatifs** $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ est noté $\mathbb{Z}$.

Propriété 1. La somme, la différence et le produit de deux entiers relatifs sont des entiers relatifs.

Propriété 2. La **division euclidienne** de deux entiers relatifs donne des entiers relatifs :
Pour tout entier a et b, avec b non nul il existe un unique couple d'entiers relatifs q et r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ avec } 0 \leq r < |b|$$

q est appelé **quotient** et r **reste** de la division.

Exemple.
- $37 = 5 \times 7 + 2$.
  La division euclidienne de 37 par 5 a pour quotient 4 et reste 2. On a bien $0 \leq 2 < 5$.
- $37 = 5 \times 4 + 17$.
  4 et 17 ne conviennent pas car 17 est **plus grand** que 5.

1.2 Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$

Définition 2. Soient deux entiers relatifs n et p, s'il existe un entier q tel que $n = p \times q$, c'est-à-dire si le reste de la division euclidienne de n par p est nul, on dit que :
- p est un diviseur de n ou que n est divisible par p.
- n est un multiple de p.

Exemple. $12 = 4 \times 3$: 12 est un multiple de 4, 4 divise 12.

Remarque.
- Tout nombre entier relatif non nul a au moins deux diviseurs : 1 et lui même.
- Tout nombre entier relatif admet une infinité de multiples. Les mutiples de n sont les nombres qui s'écrivent $k \times n$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 3. On considère trois entiers relatifs a, n et p.
Si les entiers n et p sont des multiples de a alors la somme $n + p$, la différence $n - p$ et le produit $n \times p$ le sont aussi.

Exemple. 36 et 90 sont multiples de 9 donc $126 = 90 + 36$ l'est aussi. En effet $126 = 9 \times 14$.
Remarquons aussi qu'on a $36 = 9 \times 4$, $90 = 9 \times 10$ et $126 = 9 \times (4 + 10)$.

Démonstration. Pour la somme
n est multiple de a donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = a \times k$.
p est multiple de a donc il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $n = a \times l$.
On en déduit que $n + p = a \times k + a \times l = a \times (k + l)$. Autrement dit, la somme $n + p$ est multiple de a. □

2 Nombres premiers

Définition 3. Nombre premier
Un nombre entier *naturel* p est un **nombre premier** s'il n'admet que deux diviseurs positifs distincts, 1 et lui même.

Exemple. $2, 3, 5, 7$ et 11 sont des nombres premiers.
$0, 1, 4$ et 6 ne sont pas des nombres permiers.
0 admet une infinité de diviseurs, 1 n'en a qu'un, $4 = 2 \times 2$ donc 4 a plus de deux diviseurs, $6 = 2 \times 3$ donc 6 a plus de deux diviseurs.

Propriété 4. Tous les nombres entiers naturels n qui peuvent s'écrire $n = p \times q$ avec $p > 1$ et $q > 1$ ne sont pas des nombres premiers.

Remarque. Chaque nombre entier naturel s'écrit de façon unique (à l'ordre près) comme un produit de nombres premiers. C'est le *théorème fondamental de l'arithmétique.*
Par exemple : $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

3 Nombres pairs, nombres impairs

3.1 Définitions

Définition 4. et propriété
On considère un entier naturel n.
- Si n est divisible par 2, on dit que n est **pair**.
  Il existe alors un entier p tel que $n = 2 \times p$
- Sinon, on dit que n est **impair**.
  Il existe alors un entier p tel que $n = 2 \times p + 1$

Exemple. 38 est un nombre pair car $38 = 2 \times 19$.
17 est un nombre impair et $17 = 2 \times 8 + 1$.

Démonstration. On considère un entier naturel n. On effectue la division euclidienne de n par 2.
Il existe donc un entier p (quotient) et un entier r (reste) tels quel :

$$n = 2 \times p + r \text{ avec } 0 \leq r < 2.$$

r est un entier naturel qui vérifie $0 \leq r < 2$ donc $r = 0$ ou $r = 1$.
Si $r = 0$, alors n est pair et $n = 2 \times p$,
sinon n est impair et $n = 2 \times p + 1$. □

Propriété 5. Critère de parité
Un entier naturel n est pair si son chiffre des unités est pair, c'est-à-dire égal à $0, 2, 4, 6$ ou 8.

3.2 Parité et somme d'entiers

Propriété 6.
- La somme de deux entiers pairs est un entier pair.
- La somme de deux entiers impairs est un entier pair.
- La somme d'un entier pair et d'un entier impair est un entier impair.

Démonstration.
- Pour deux entiers pairs.
  Si n et m sont pairs, il existe p et q tels quel $n = 2 \times p$ et $m = 2 \times q$.
  On a alors $n + m = 2 \times p + 2 \times q$ donc $n + m = 2 \times (p + q)$ donc $n + m$ est pair.
- Pour deux entiers impairs.
  Si n et m sont impairs, il existe p et q tels quel $n = 2 \times p + 1$ et $m = 2 \times q + 1$.
  On a alors $n + m = 2 \times p + 1 + 2 \times q + 1$ donc $n + m = 2 \times (p + q) + 2 = 2 \times (p + q + 1)$
  donc $n + m$ est pair.

□

3.3 Parité d'un carré

Propriété 7. On considère un entier naturel n.
- Si n est pair alors son carré n^2 est pair.
- Si n est impair alors son carré n^2 est impair.

Exemple.
- 12 est pair et $12^2 = 144$ aussi.
- 9 est impair et $9^2 = 81$ aussi.

Démonstration. On considère un entier relatif n.
- Si n est pair alors on peut écrire $n = 2 \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
  Donc $n^2 = (2 \times k)^2 = (2k) \times (2k) = 2 \times (2k^2)$. Donc n^2 est pair.
- Si n est impair alors on peut écrire $n = 2 \times k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
  Donc $n^2 = (2k+1)^2 = (2k+1) \times (2k+1) = (2k)^2 + 2k + 2k + 1 = 2 \times (2k^2 + k + k) + 1$ donc n^2 est impair.
  On peut aussi employer l'identité remarquable $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ et obtenir le même résultat.

$\square$

Propriété 8. La réciproque de ce théorème est vraie :
- Si le carré n^2 est pair alors n est pair,
- Si le carré n^2 est impair alors n est impair.