# Résumé du chapitre 4 : Diagonalisation

Dans ce chapitre, toutes les matrices considérées sont **carrées** : elles ont autant de lignes que de colonnes.

La *diagonalisation* est un procédé utilisé dans de nombreux domaines et qui simplifie considérablement les applications des matrices.

En particulier, cela nous permet de calculer les puissances d'une matrice carré.

## 1. Valeurs propres, vecteurs propres

**Définition 1.**

Soit $A$ une matrice carré de taille $n$ (on dit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\lambda$ est une **valeur propres** de $A$ s'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ **non nul**, tel que $AX = \lambda X$.
- Un tel vecteur $X \neq \overrightarrow{0}$ est un **vecteur propre** de $A$ associé à $\lambda$.

**Remarque**

- Pour *déterminer les valeurs propres*, on utilise le **polynôme caractéristique**.
- Pour *déterminer les vecteurs propres*, on **résout des systèmes**.
- Certaines matrices n'ont pas de valeurs propres. Chaque matrice de carré de taille $n$ peut avoir jusqu'à $n$ valeurs propres distinctes.
- Pour chaque valeur propre $\lambda$ il existe une infinité de vecteurs propres.

## 2. Polynôme caractéristique et valeurs propres

**Définition 2.**

Le **polynôme caractéristique** $P(\lambda)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le déterminant de la matrice $A - \lambda I_n$ :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Les *racines* de ce polynôme (= les solutions de $P(\lambda) = 0$) sont les **valeurs propres** de $A$.

**Exemple :**

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. On a $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 6 & -\lambda \end{pmatrix}$. On calcule ce déterminant :

$P(\lambda) = (5-\lambda)(-\lambda) + 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$.

On calcule ses racines avec $\Delta = 5^2 - 4 \times 6 = 1$ et il vient $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Les *valeurs propres* de $A$ sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

## 3. Déterminer les vecteurs propres d'une matrice

Cette étape suppose d'avoir *déjà* obtenu les *valeurs propres* d'une matrice.

**Méthode :**

On considère une matrice $A$.

Pour déterminer ses *vecteurs propres* associés à la valeur propre $\lambda$ on résout le système $A - \lambda I = \overrightarrow{0}$

Chaque solution, non nulle, de ce système est un vecteur propre de la matrice $A$ associé à la valeur propre $\lambda$ .

**Remarque :**

On se placera dorénavant dans des situations où il suffit de donner **un seul** vecteur propre pour chaque valeur propre.

*Le cas général (où l'on peut être amené à en donner plusieurs) ne sera pas étudié cette année.*

**Exemple :**

Considérons à nouveau $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. On a déterminé plus haut ses valeurs propres $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

- Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 2$. On résout le système $A - 2I_2 = \vec{0}\,(S)$

  $$(S) \iff \begin{pmatrix} 5-2 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x - y & = & 0 \\ 6x - 2y & = & 0 \end{cases} \iff y = 3x$$

  On peut proposer comme *vecteur propre* associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$ : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 3$. On résout le système $A - 2I_3 = \vec{0}\,(S)$

  $$(S) \iff \begin{pmatrix} 5-3 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y & = & 0 \\ 6x - 3y & = & 0 \end{cases} \iff y = 2x$$

  On peut proposer comme *vecteur propre* associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$ : $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

## 4. Diagonaliser une matrice

**Théorème**

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **diagonalisable** s'il existe deux matrices $D$ et $S$ telles que :

- $D$ soit *diagonale*,
- $S$ soit *inversible*,
- $A = SDS^{-1}$.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **Si $A$ a $n$ valeurs propres distinctes** alors $A$ est diagonalisable.

**Remarque**

- Cette relation s'inverse alors en :

  $$D = S^{-1}AS$$

- **Diagonaliser** une matrice c'est *donner les matrices $S$ et $D$* ainsi, qu'éventuellement, $S^{-1}$.

**Théorème**

Si $A$ est diagonalisable alors :

- Les **coefficients diagonaux** de $D$ sont les *valeurs propres* de $A$.

  $D$ est *unique*, à l'ordre près des valeurs propres.
- Les **colonnes** de $S$ sont les *vecteurs propres* de $A$, donnés *dans le même ordre* que les valeurs propres.

**Exemple**

On a vu pour $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ que ses valeurs propres étaient $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Elles sont associées aux vecteurs propres $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Donc les matrices $D$ et $S$ sont alors $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

On peut calculer $S^{-1}$ (avec la formule des cofacteurs) : $S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier les deux formules : $D = S^{-1}AS$ et $A = SDS^{-1}$.