## Exercice 1

On considère la matrice :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 4b-4c & 2b-2c \\ b & a+2c & -b+c \\ -2b & 4b-4c & a+4b-2c \end{pmatrix} \text{ avec } a, b \text{ et } c \text{ des réels.}$$

On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction des matrices $I_3, B$ et $C$.
   On a $M(a,b,c) = aI_3 + bB + cC$.
2. Calculer $BC$ et $B^2$.
   On pose le calcul et $BC = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix} = 2C$.
   $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 8 & 8 \end{pmatrix} = 2B$.
3. On admet que $CB = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ et $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Les matrices $B$ et $C$ sont-elles commutatives ?
   Les matrices commutent si $BC = CB$. C'est le cas, elles commutent.
4. On note $H = \{M(a,b,c),\ \text{avec } a, b \text{ et } c \text{ réels }\}$.
   Démontrer que le produit de deux matrices $M(a,b,c)$ et $M(a',b',c')$ de $H$ est encore une matrice de $H$.
   Calculons $MM'$ on a $MM' = (aI_3 + bB + cC)(a'I_3 + b'B + c'C) =$
   $= aa'I_3 + ab'B + ac'C + ba'B + bb'B^2 + bc'BC + ca'C + cb'CB + cc'C^2$
   $= aa'I_3 + (2bb' + ab' + ba')B + (ac' + ca' + 2bc' + 2cb')C$
   Aussi le produit $MM'$ est toujours un élément de $H$.