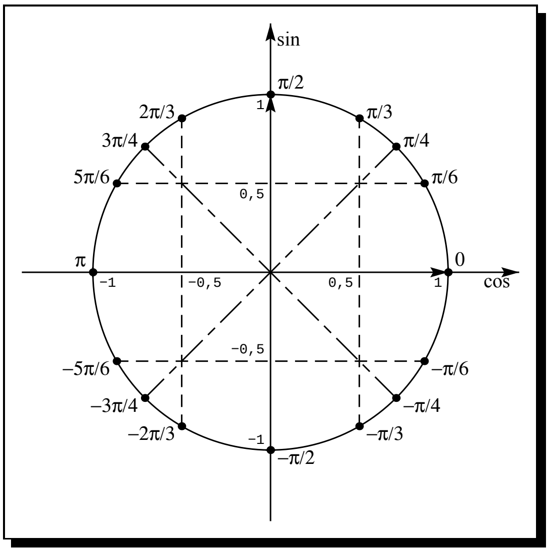
# Nombres complexes : exercices




| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |

**Exercice 1 : Équation dans $\mathbb{C}$**

Déterminer la solution complexe $z_0$ de l'équation

$$\frac{z+1}{z-1} = 1 + i.$$

**Exercice 2 : Système d'équations dans $\mathbb{C}$**

Déterminer les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ tels que

$$\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ -2iz_1 + z_2 = 0 \end{cases}$$

**Exercice 3 : Impédance complexe**

On note $j$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

On donne le nombre complexe

$$\underline{\alpha} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + R) + \underline{Z}_2 R},$$

avec $R = 900$, $\underline{Z}_1 = 1\,100j$, $\underline{Z}_2 = -600j$.

Mettre le nombre complexe $\underline{\alpha}$ sous la forme algébrique $a + bj$.

**Exercice 4 : Impédance complexe**

On note $j$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

L'impédance complexe d'un circuit est telle que

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3},$$

avec $\underline{Z}_1 = 1 + 2j$, $\underline{Z}_2 = -1 + 3j$ et $\underline{Z}_3 = 4 + 5j$.

Mettre $\underline{Z}$ sous la forme algébrique $a + bj$.

**Exercice 5 : Écriture sous forme trigonométrique**

Déterminer les formes trigonométriques des nombres

$$z_1 = 3i, \qquad z_2 = -5, \qquad z_3 = 2 - 2i \qquad z_4 = 1 + i\sqrt{3}$$

**Exercice 6 : Module et argument d'une puissance**

On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} - i, \qquad z_2 = 2 - 2i, \qquad A = \frac{z_1^4}{z_2^3}$$

(où $i$ désigne lme nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$).

**1.** $a)$ Déterminer le module et un argument des nombres complexes $z_1$, $z_2$, $z_1^4$, $z_2^3$ et $A$.

$b)$ En déduire la forme algébrique des nombres complexes $z_1^4$, $z_2^3$ et $A$.

**2.** Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Vérifie  les résultats obtenus avec votre calculatrice.

**Exercice 7 : Équation trigonométrique et linéarisation**

Le but de cet exercice est la résolution dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ de l''équation

$$2\sin x - \sin 3x = 0.$$

**1.** Soit $x$ un nombre réel :

$a)$ Développer $(e^{ix} - e^{-ix})^3$ et montrer que

$$(e^{ix} - e^{-ix})^3 = (e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix}).$$

$b)$ Transformer l'égalité précédente à l'aide des formules d'Euler, et en déduire que :

$$4\sin^3 x - \sin x = 2\sin x - \sin 3x.$$

**2.** Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ les équations suivantes :

$$a)\ \sin x = 0, \qquad b)\ \sin x = \frac{1}{2}, \qquad c)\ \sin x = -\frac{1}{2}.$$

**3.** En déduire les solutions appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ de l'équation

$$2\sin x - \sin 3x = 0.$$

**Exercice 8 : Racine carrée dans $\mathbb{C}$**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 = 3 - 4i.$$

**Exercice 9 : Èquation du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$**

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0.$$

**2.** Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.

**Exercice 10 : Èquation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$**

Calculer $(3 - 2i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + z - 1 + 3i = 0.$$

**Exercice 11 : Èquation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$**

Calculer $(5-3i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l’équation

$$z^2+(5-i)z+2+5i=0.$$

**Exercice 12 : Équation du second degré dans $\mathbb{C}[X]$**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l’équation

$$z^2-(5+3i)z+10+5i=0.$$

**Exercice 13 : Équation dans $\mathbb{C}[X]$ et triangle**

On donne le polynôme de la variable complexe $z$ :

$$P(z)=z^3-(7+3i)z^2+(16+15i)z+2-36i$$

où $i$ désigne le nombre complexe de module 1 et d’argument $\pi/2$.

1. *a*) Calculer $P(2i)$.
   *b*) En déduire une factorisation de $P(z)$ en admettant que, dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, si un polynôme s’annule pour $z=a$, alors il peut s’écrire sous la forme $(z-a)Q(z)$ où $Q(z)$ est un polynôme.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l’équation $P(z)=0$.
3. *a*) Placer dans le plan complexe les points $A$, $B$ et $C$ d’affi es respectives

$$z_1=2i, \qquad z_2=3-2i, \qquad \text{et} \qquad z_3=4+3i.$$

   *b*) Calculer la valeur exacte de la longueur de chaque côté du triangle $ABC$.

**Exercice 14 : Linéarisation**

Utiliser les formules d’Euler pour transformer en somme l’expression suivante :

$$f(x)=\sin(2x)\sin(3x)$$

**Exercice 15 : Linéarisation**

Linéariser l’expression $\sin^3(2x)$.

**Exercice 16 : Ligne de niveau**

Quel est l’ensemble des points $M$ d’affi e $z$ du plan vérifian $|z-3|=2$ ?

**Exercice 17 : Ligne de niveau**

Quel est l’ensemble des points $M$ d’affi e $z$ du plan vérifian $\operatorname{Arg}(z-(3-i))=\pi/3$ ?

**Exercice 18 : Ligne de niveau**

On désigne par $j$ le nombre complexe de module 1 et d’argument $\pi/2$.
Déterminer l’ensemble des points $M$ d’affi e $z$ du plan tels que

$$z=1-j\frac{L}{C\omega}$$

où $L$ et $C$ sont deux contantes réelles strictement positives et où $\omega$ est un réel variant dans l’intervalle $]0,+\infty[$.

**Exercice 19 : Fonction de transfert en électronique**

En électronique, on utilise la « fonction de transfert » $\underline{T}$ de la pulsation $\omega$, défini  quand $\omega$ décrit l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}.$$

1. Montrer que pour tout nombre réel $\omega$ de $[0, +\infty[$, on a :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{1 - j\omega}{1 + \omega^2}.$$

2. Le plan complexe est muni du repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité 20 cm (ou 20 grands carreaux). Placer les points $A, B, C, D, E$ et $F$ d'affi es respectives

$$\underline{T}(0), \qquad \underline{T}(0,3), \qquad \underline{T}(0,5), \qquad \underline{T}(1), \qquad \underline{T}(2), \qquad \underline{T}(3).$$

3. Montrer que, pour tout nombre réel $\omega$ de $[0, +\infty[$, le point $M$ d'affi e $\underline{T}(\omega)$ est situé sur le demi-cercle inférieur de diamètre $[OA]$.
4. Quel est l'ensemble des points $m$ d'affi e $1 - j\omega$ quand $\omega$ varie dans $[0, +\infty[$ ?

**Exercice 20 : Fonction de transfert en électronique**

En électronique, sur un montage, on utilise la « fonction de transfert » $\underline{T}$ de la pulsation $\omega$, défini  quand $\omega$ décrit l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{4}{(1 + j\omega)^3}.$$

1. Calculer

$$\underline{T}(0), \qquad \underline{T}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \underline{T}(1), \qquad \underline{T}(\sqrt{3}).$$

2. On modifi  le montage précédent et on obtient alors la « nouvelle fonction de transfert » $\underline{H}$ défini  par :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{T}(\omega)}{1 + \underline{T}(\omega)}$$

   Calculer les modules et argument de $\underline{H}(0)$, $\underline{H}(1)$ et $\underline{H}(\sqrt{3})$.
3. Le plan complexe est muni du repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $A$ le point d'affi e $-1$ et $M$ le point d'affi e $\underline{T}(\omega)$.
   *a*) Montrer que le module de $\underline{H}(\omega)$ est égal à $MO/MA$.
   *b*) Montrer qu'un argument de $\underline{H}(\omega)$ est égal à l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}})$.
   *c*) Utiliser *a*) et *b*) pour retrouver les résultats du **2.**

**Exercice 21 : Une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, interprétation géométrique**

À tout nombre complexe $z$, on associe le nombre complexe $Z$ défin  par

$$Z = z^2 - z + 2$$

(on défini  ainsi une fonction de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$). On appelle respectivement $M$ et $M'$ les images de $z$ et $Z$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. *a*) Si $M$ a pour affi e $z = -2 + i$, quel est l'affi e du point $M'$ ?
   *b*) Si le point $M'$ a pour affi e $Z = 1$, quels sont les affi es des points $M$ qui ont $M'$ pour associé ?
2. *a*) On pose $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont des nombres réels. Exprimer en fonction de $x$ et $y$ les parties réelles et imaginaires $X$ et $Y$ de $Z$.
   *b*) Quels sont les points $M$ du plan pour lesquels $M'$ appartient à la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par $O$ ?

**Exercice 22 : Fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ – Ensembles de points**

On pose $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont des nombres réels, et on appelle $M$ l'image de $z$ dans le plan complexe.
À tout nombre complexe $z \neq -i$, on associe le nombre complexe

$$Z = \frac{z + 2i}{1 - iz}.$$

**1.** Déterminer, en fonction de $x$ et $y$, la partie réelle et la partie imaginaire de $Z$.

**2.** Quel est l'ensemble $E$ des points tels que $Z$ soit imaginaire pur ? Tracer $E$.

**3.** *a*) Déterminer une relation entre $x$ et $y$ afi  que $Z$ soit réel. Démontrer que cette relation s'écrit qussi sous la forme

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \frac{1}{4},$$

où $a$ et $b$ sont des réels que l'on déterminera.

*b*) Quel est l'ensemble $F$ des points $M$ correspondant ? Tracer $F$.