Les nombres complexes

Aspect géométrique

EXERCICE 1

1) D est le point de coordonnées $(\sqrt{3}; 3)$. Quel est son affixe ?
2) On donne les points A, B, C d'affixes respectives :
$$z_A = \sqrt{3} + i\ , \quad z_B = -\sqrt{3} - i\ , \quad z_C = 2i$$
Calculer le module et un argument pour ces trois affixes. Que peut-on déduire pour les points A, B et C.
3) Placer les points A, B, C et D à la règle et au compas.
4) Quelle est la nature du quadrilatère $AOCD$. Pourquoi ?
5) Quel est l'affixe du point E tel que $ODEB$ soit un parallélélogramme ?

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des point M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée.

1) $|z| = 3$
2) $\text{Re}(z) = -2$
3) $\text{Im}(z) = 1$

Opération dans $\mathbb{C}$

EXERCICE 3

Donner la forme algébrique des complexes suivant :

1) $z = 3 + 2i - 1 + 3i$
2) $z = 6 + i - (2 + 4i)$
3) $z = 12 - 3i - 4 - 5 + 8i$
4) $z = (1 + 2i)(4 + 3i)$
5) $z = (3 - i)(2 + 7i)$
6) $z = (1 + i)^2$
7) $z = (3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})$
8) $z = (2 - 5i)^2$
9) $z = (1 + i)(2 - 3i)(1 + i)$
10) $z = (2 + i)^2(1 - 2i)$

EXERCICE 4

Donner la forme algébrique des complexes suivants en rendant réel le dénominateur :

1) $z = \dfrac{1}{1 - i}$
2) $z = \dfrac{1}{2 - i\sqrt{3}}$
3) $z = \dfrac{1}{4 - 3i}$
4) $z = \dfrac{4 - 6i}{3 + 2i}$
5) $z = \dfrac{5 + 15i}{1 + 2i}$
6) $z = \dfrac{1 + 2i}{1 - 2i}$

7) $z = \dfrac{3-6i}{3+i} + \dfrac{4}{3-i}$ 8) $z = \left(\dfrac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\dfrac{1+3i}{3+2i}\right)$

Résolution d'équation du 1er degré dans $\mathbb{C}$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. Donner la solution sous forme algébrique.

1) $(1+i)z = 3-i$

2) $2z + 1 - i = iz + 2$

3) $(2z+1-i)(iz+3) = 0$

4) $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$

5) $(iz+1)(z+3i)(z-1+4i) = 0$

Exercice 6

Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^2$:

1) $\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} z - z' = i \\ iz + z' = 1 \end{cases}$

Nombre conjugué

Exercice 7

Donner la forme algébrique du conjugué $\bar{z}$ des complexes suivants :

1) $z = 3 - 4i$

2) $z = \dfrac{1}{i-1}$

3) $z = \dfrac{3-i}{1+i}$

4) $z = \dfrac{2i+1}{i+2} + \dfrac{1-2i}{2-i}$

5) $z = \dfrac{2i+1}{i+2} - \dfrac{1-2i}{2-i}$

Exercice 8

Soit $z = x + iy$ avec x et y réels ; on note Z le nombre complexe : $Z = z - 2\bar{z} + 2$.

1) Calculer en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de Z.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z = 0$ d'inconnue z.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z suivantes :

1) $2\bar{z} = i - 1$

2) $(2z + 1 - i)(i\,\bar{z} + i - 2) = 0$

3) $\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i$

Exercice 10

Soit $z = x + iy$ avec x et y réels.
À tout complexe z, on associe $Z = 2\,\overline{z} - 2 + 6i$.

1) Calculer en fonction de x et de y, les parties réelle et imaginaire de Z.
2) Existe-t-il des complexe z tels que $Z = z$?

Exercice 11

Dans le plan complexe, M est point d'affixe $z = x + iy$, x et y réels. À tout complexe z, $z \neq 1$, on associe : $z' = \dfrac{5z-2}{z-1}$

1) Exprimer $z' + \overline{z'}$ en fonction de z et $\overline{z}$.
2) Démontrer que « z' est un imaginaire pur » est équivaut à « M est un point d'un cercle privé d'un point ».

Exercice 12

Pour tout complexe z différent de i, on pose : $z' = \dfrac{iz-1}{z-i}$. Prouver que :

$$z' \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 1$$

Vrai-Faux

Exercice 13

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point. On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

1) Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.
2) Si $z + \dfrac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.
3) Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

Équations du seond degré

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{C}$, chacune des équations suivantes.

1) $2z^2 - 6z + 5 = 0$
2) $z^2 - 5z + 9 = 0$
3) $z^2 - 2z + 3 = 0$
4) $z^2 = z + 1$
5) $z^2 + 3 = 0$
6) $z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$

Exercice 15

θ est un réel donné

1) Résoudre l'équation (E) : $z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$
2) Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, A et B sont les point ayant pour affixe les solutions de l'équation (E). Quelles sont les valeurs de θ pour lesquelles le triangle OAB est équilatéral ?

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant : $\begin{cases} z_1 z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$

Exercice 17

Trouver le complexe p et q tels que l'équation : $z^2 + pz + q = 0$ admette pour solutions les nombres : $1 + 2i$ et $3 - 5i$

Exercice 18

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$
2) $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$

Polynômes de degré supérieur

Exercice 19

On pose pour tout complexe z : $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$

1) Vérifier que : $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$

Exercice 20

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ puis déduire les solutions de $z^3 - 1 = 0$
2) On désigne par j le complexe : $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   - Calculer j^2, j^3, $j^{2\,006}$
   - Calculer $S = 1 + j + j^2 + \cdots + j^{2\,006}$

Exercice 21

On considère le polynôme : $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

1) Déterminer les réels a et b tels que : $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$
2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z) = 0$

Exercice 22

Pour tout complexe z, on considère : $f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$

1) b est réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaires de $f(b)$.
2) En déduire que 'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.
3) Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

4) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Exercice 23

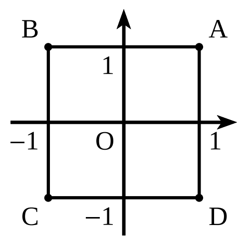
Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$
2) $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
3) $z_3 = 4 - 4i$
4) $z_4 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{i\sqrt{3}}{4}$
5) $z_5 = -2i$
6) $z_6 = \dfrac{4}{1-i}$

Exercice 24

Dans le repère orthonormal direct,on a représenté le carré ABCD ci-contre.

Donner l'affixe et un argument de chacun des sommets du carré $ABCD$



Exercice 25

À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près d'un argument de chacun des nombres complexes suivants :

1) $z = 4 - 3i$
2) $z = 1 + 2i$
3) $z = -2 + i$

Exercice 26

Trouver une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

1) $z = (1-i)^2$
2) $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}$
3) $z = \dfrac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$

Exercice 27

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

1) Donner une forme trigonométrique de z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$
2) Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$
3) En déduire que :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Exercice 28

La formule de Machin

On rappelle que pour tou réel t ($t \geqslant 0$), il existe un unique réel α de $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\alpha = t$: ce réel est noté $\arctan t$.

1) Donner la forme algébrique de $z = (5 - i)^4(1 + i)$.
2) On pose $\alpha = \arctan\dfrac{1}{5}$ et $\beta = \arctan\dfrac{1}{239}$
   Montrer que $-\alpha$ est un argument de $5 - i$ et $-\beta$ un argument de z.
   En déduire que $4\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$
3) Prouver en fait que $4\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}$

Note : La formule $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}$ *permit à John Machin, mathématicien anglais, en 1706 de calculer les 100 premières décimales de π. On utilise un développement limité pour calculer les* arctan *!*

Forme exponentielle

Exercice 29

Donner une forme exponentielle de chacun des complexes suivants :

1) $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$ 2) $z_2 = (1 + i\sqrt{3})^4$ 3) $z_3 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$

Exercice 30

Dans chacun des cas suivants, écriver z sous la forme exponentielle et en déduire la forme algébrique de $\bar{z}$ et $\dfrac{1}{z}$.

1) $z = \dfrac{6}{1 + i}$ 2) $z = (1 + i\sqrt{3})^4$ 3) $z = 3i\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ 4) $z = -12e^{i\frac{\pi}{4}}$

Ensemble de points

Exercice 31

Déterminer et construire les ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 des points dont l'affixe z vérifie la condition proposée.

1) $z = 3e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0; 2\pi[$
2) $z = r\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $r \in [0; +\infty[$
3) $z = k\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exercice 32

A et B ont pour affixes respectives 1 et $3 + 2i$.
Dans chacun des cas, donner l'ensemble des point M dont l'affixe z satisfait la condition suivante :

1) $|z - 1| = |z - (3 + 2i)|$
2) $|z - (3 + 2i)| = 1$

Exercice 33

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe

$$Z = f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}.$$

1) On pose $z = x + iy$, avec x et y deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.

   On vérifiera que $\quad \text{Re}(Z) = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2} \quad$ et $\quad \text{Im}(Z) = \dfrac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y + 2)^2}.$

   ⚠ soyez patient et méthodique !
2) En déduire la nature de :
   a) l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel ;
   b) l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.
   c) Représenter ces deux ensembles.

Exercice 34

La Réunion juin 2010

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère le point A d'affixe $1 + i$.
On associe, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M' d'affixe

$$z' = \frac{z - 1 - i}{z}.$$

Le point M' est appelé le point image du point M.

1) a) Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B′, image du point B d'affixe i.

   b) Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.

3) Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel ?

Triangle

Exercice 35

On donne les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c

$$a = 1 + \frac{3}{4}i \quad b = 2 - \frac{5}{4}i \quad c = 3 + \frac{7}{4}i$$

1) Placer les points A, B et C.
2) Quelle est la nature du triangle ABC ?
3) Calculer l'affixe de A' tel que ABA'C soit un carré.

Exercice 36

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2 + 2i$, $b = -3 - 6i$ et $c = 1$.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 37

Les points A, B, C, D ont pour affixes respectives

$$a = 2 - 2i, \quad b = -1 + 7i, \quad c = 4 + 2i, \quad d = -4 - 2i$$

1) Ω est le point d'affixe $\omega = -1 + 2i$
   Prouver que A, B, C, D appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon 5.
2) On note e l'affixe du milieu E de [AB].
   Calculez e puis prouver que $\dfrac{a-e}{d-e} = \dfrac{c-e}{a-e}$
   La droite (EA) est une droite remarquable du triangle DEC ; préciser laquelle.

Exercice 38

Polynésie septembre 2011

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6 - i$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.
Partie A

1) Calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
2) En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{i(z - 2 + 3i)}{z - i}$$

1) Soit D le point d'affixe $z_D = 1 - i$. Déterminer l'affixe du point D′ image du point D par f.
2) a) Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe $2i$.

   b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).
3) Démontrer que, pour tout point M distinct du point B, $\mathrm{O}M' = \dfrac{\mathrm{A}M}{\mathrm{B}M}$.
4) Démontrer que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité :

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{B}M}, \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

5) Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
6) Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

Exercice 39

Polynésie juin 2006

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; unité graphique 2 cm. On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z - 1}{z + 1}$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1) Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.
2) a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $(z' - 1)(z + 1) = -2$.

   b) En déduire une relation entre $|z' - 1|$ et $|z + 1|$, puis entre $\arg(z' - 1)$ et $\arg(z + 1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1.
   Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3) Montrer que si M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle $(\mathscr{C}')$ de centre A et de rayon 1.
4) Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.

   a) Déterminer la forme exponentielle de $(p + 1)$.

b) Montrer que le point P appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

c) Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.
Montrer que les points A, P′ et Q sont alignés dans cet ordre.

d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P′ du point P par l'application f.

Vrai-Faux et QCM

Exercice 40

Vrai-Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soient A le point d'affixe $2 - 5i$ et B le point d'affixe $7 - 3i$.
Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.

2) Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - \mathrm{i}| = |z + 2i|$.
Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.

3) Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.
Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.

4) Soit z un nombre complexe non nul.
Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i + z| = 1 + |z|$.

5) Soit z un nombre complexe non nul.
Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Exercice 41

QCM

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = i$, $z_C = -1$, $z_D = -i$.

1) L'ensemble des points d'affixe z telle que $|z + i| = |z - 1|$ est : (2 réponses possibles)
   - la médiatrice du segment [BC],
   - le milieu du segment [BC],
   - le cercle de centre O et de rayon 1,
   - la médiatrice du segment [AD].

2) L'ensemble des points d'affixe z telle que $\dfrac{z+i}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :

- la droite (CD) privée du point C,
- le cercle de diamètre [CD] privé du point C,
- le cercle de diamètre [BD] privé du point C,
- la médiatrice du segment [AB].

3) L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z-i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est :

- le demi-cercle de diamètre [BD] passant par A,
- la droite (BD),
- la demi-droite]BD) d'origine B passant par D privée de B,
- le cercle de diamètre [BD] privé de B et D.