Section 1

Forme algébrique d'un nombre complexe

Definition

On désigne par i le nombre tel que $i^2 = -1$, et on appelle **nombre complexe** tout nombre z ayant une écriture du type

$$z = a + ib$$

où a et b sont des nombres réels.
Cette écriture est appelée **forme algébrique**, ou encore **forme cartésienne**, du nombre complexe z.

Partie réelle et partie imaginaire

Les nombres a et b sont respectivement appelés **partie réelle** et **partie imaginaire** du nombre complexe z. On note :

$$a = \Re(z) \qquad \text{et} \qquad b = \Im(z)$$

On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Il contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (on note $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Egalité de deux complexes

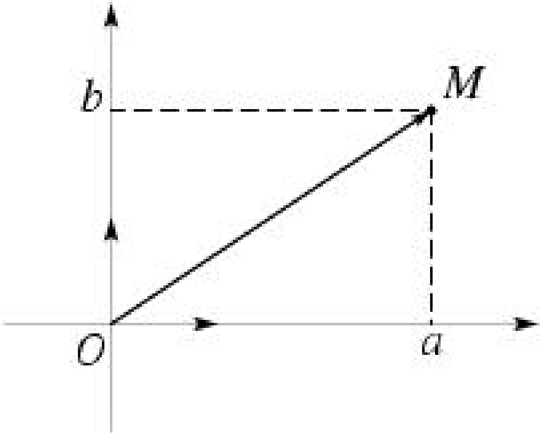
Deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sont égaux si et seulement si

$$a = a' \qquad \text{et} \qquad b = b'.$$

Section 2

Représentation géométrique d'un nombre complexe

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on associe à tout nombre complexe $z = a + ib$ le point M de coordonnées (a, b). Ce point $M(a, b)$ est appelé **image** du nombre complexe z, et z est appelé **affixe** du point M.



M
b
O
a

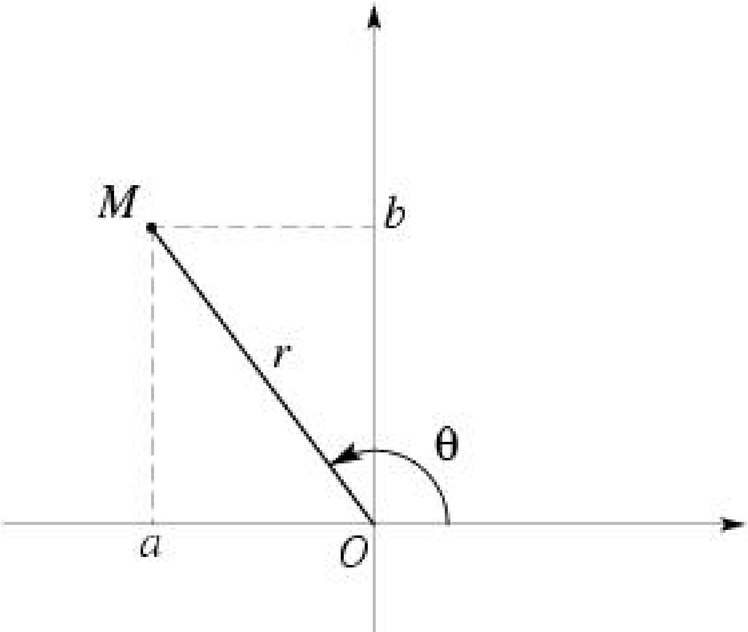
De même, Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est nommé vecteur image du nombre complexe z, et z est appelé **affixe du vecteur** $\overrightarrow{OM}$.

L'axe des abscisses $(O, \vec{u})$ est dit *axe réel* ; l'axe des ordonnées $(O, \vec{v})$ est dit *axe des imaginaires*.

1. Le point O est l'image du nombre 0.
2. Un nombre z réel a pour image un point de l'axe $(O, \vec{u})$
3. Un nombre z imaginaire pur (c'est à dire de la forme $z = ib$ avec b réel) a pour image un point de l'axe $(O, \vec{v})$
4. Les nombres z et $-z$ ont pour images deux points M et M' symétriques par rapport à O.

Section 3

Forme trigonométrique, forme exponentielle


M
b
r
θ
a
O

Angle et distance

Soit le nombre complexe $z = a + ib$ et son point image M dans le plan.
Le point M, s'il est différent de l'origine O, est entièrement déterminé par les données de la distance r et de l'angle θ, où

$$r = OM \qquad \text{et} \qquad \theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}).$$

Forme exponentielle

On notera

$$z = re^{i\theta}$$

la **forme exponentielle** du nombre complexe z.

Module et argument

On appelle **module** de z, et on note $|z|$, le nombre $|z| = r$.
On appelle **argument** de z, et on note $\arg(z)$, toute mesure de l'angle θ.
L'argument d'un nombre complexe n'est donc défini qu'à $2k\pi$ près.
On en donne généralement la *détermination principale* qui est la mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

En conséquence, les nombres $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$ sont égaux si et seulement si

$$r = r' \qquad \text{et} \qquad \theta = \theta' + 2k\pi, \quad \text{o} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De la forme algébrique à la forme exponentielle

Pour passer d'une écriture à une autre, on utilise les résultats suivants : si $z = a + ib$, on a

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

et en considérant les projections orthogonales du point M sur les axes de coordonnées, on obtient les relations

$$a = r\cos\theta, \qquad \text{et} \qquad b = r\sin\theta.$$

On peut alors déterminer θ en utilisant le fait que

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

De la forme exponentielle à la forme algébrique

Réciproquement, si on a la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$, on détermine la forme algébrique avec la relation :

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = a + ib.$$

Remarque

On peut écrire $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

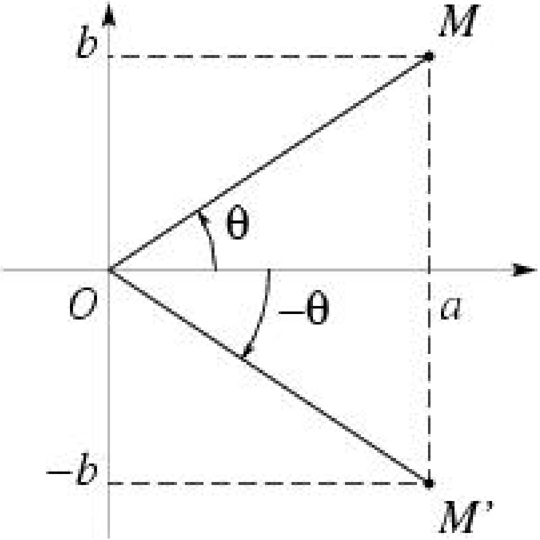
Section 4

Opérations dans C

Définition du conjugué

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z et on note $\bar{z}$ le nombre

$$\bar{z} = a - ib$$


M
b
θ
O
−θ
a
−b
M'

Conjugué et affixes

z et $\bar{z}$ sont les affixes de deux points M et M' **symétriques par rapport à l'axe réel.**

Conjugué et forme exponentielle

Si $z = re^{i\theta}$ alors

$$\bar{z} = re^{-i\theta}$$

Les calculs s'effectuent de la même manière que dans $\mathbb{R}$. Il suffit de remplacer $i^2 = -1$ dès que l'occasion se présente.

Somme et produit $\mathbb{C}$

Si $z = a + ib$ et $z' = c + id$ sont deux nombres complexes :

$$(a + ib) + (c + id) = a + b + i(c + d)$$
$$(a + ib) \times (c + id) = ac - bd + i \times (ad + bc)$$
$$(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$$

Inverse dans $\mathbb{C}$

Si z est un nombre complexe non nul alors

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Quotient dans $\mathbb{C}$

Si z et z' sont deux nombres complexes et que $z' \neq 0$ alors

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{|z|^2}$$

Écriture souvent pénible qu'on n'utilise qu'en dernier recours...

On ne peut utiliser la forme exponentielle pour l'addition et la soustraction de deux complexes.
Le produit et le quotient ont, par contre, des résultats plus simples !

Produit sous forme exponentielle

Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ sont deux nombres complexes alors

$$z \times z' = r \times r'e^{i(\theta+\theta')}$$

Autrement dit :
le **module du produit** est le **produit** des modules,
L'**argument du produit** est la **somme** des arguments.

Quotient sous forme exponentielle

Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ sont deux nombres complexes (avec $z' \neq 0$) alors

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

Autrement dit :
le **module du quotient** est le **quotient** des modules,
L'**argument du quotient** est la **soustraction** des arguments.

La grande simplicité des formules précédentes nous incite à creuser dans cette direction. Il vient facilement :
Si n est un entier et Si $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe,

$$z^n = r^n e^{in \times \theta}$$

Formule de Moivre

En choisissant un nombre complexe de module 1, $z = \cos\theta + i\sin\theta$ il vient :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

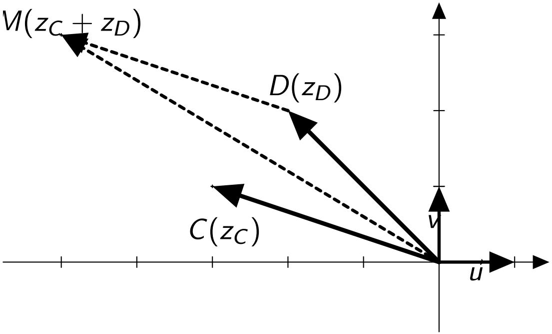
C'est une formule très puissante et qui a de nombreuses utilisations.

Section 5

Interprétation géométrique

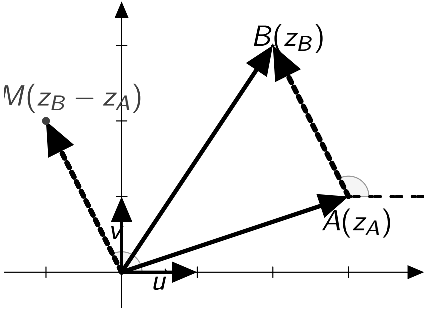
Addition de deux complexes

Soit z_C et z_D deux nombres complexes de points images respectifs C et D. Alors le nombre $z_N = z_C + z_D$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.



Soustraction de deux complexes

Soit z_A et z_B deux nombres complexes de points images respectifs A et B. Alors le nombre $z_M = z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



On a donc en particulier,

$$AB = |z_B - z_A| \qquad \text{et} \qquad (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

Le produit d'un complexe par un réel correspond au produit des vecteurs par un réel.
Si k est un réel et z l'affixe d'un point M, kz est l'affixe du vecteur $k\overrightarrow{OM}$.

Section 6

Proriétés de calculs

Soit z et z' deux nombres complexes. On vérifie immédiatement les relations

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z}' \qquad \text{et} \qquad \overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z}'$$

On a en outre, si $z = a + ib$ avec a et b réels,

$$z + \overline{z} = 2a \qquad z - \overline{z} = 2ib \qquad z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

On en déduit les parties réelles et imaginaires du nombre z :

$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \qquad \text{et} \qquad \Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

Comme on l'a vu dans le paragraphe concernant les opérations sous forme trigonométrique, le module est compatible avec la multiplication et la division.
Autrement dit, si z et z' sont deux nombres complexes, et si n est un entier relatif, on a

$$|z \times z'| = |z| \times |z'| \qquad |z^n| = |z|^n \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{et} \quad \left|\frac{z}{z'}\right|$$

Le module n'est pas compatible avec l'addition. On a néanmoins une majoration du module d'une somme :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Cette relation est connue sous le nom d'*inégalité triangulaire*.

Comme pour les module, on a des relations simples concernant les arguments dans le cas du produit ou du quotient de deux nombres complexes :
si z et z' sont deux nombres complexes, et si n est un entier relatif, on a

$$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi} \qquad \arg(z^n) = n \times \arg(z) \quad ($$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \pmod{2\pi} \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

De plus, si z_A, z_B et z_C sont respectivement les affixes des points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, alors on a

$$\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

Section 7

Applications

On considère l'équation polynômiale d'inconnue complexe z :

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0$$

où a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$, le *discriminant* du polynôme.
Alors

- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une solution réelle double :

$$x = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation (E) n'admet pas de solution réelle, mais elle admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Formule de Moivre

- Soit $z = e^{i\theta}$. Le nombre z^n (pour $n \in \mathbb{N}$) a pour module 1 et pour argument $n\theta$.
  On en déduit la *formule de Moivre*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \qquad \text{soit} \qquad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Formules d'Euler

- De plus, des relations

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{et} \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

on déduit les *formules d'Euler*

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Linéarisation

Ces formules permettent la *linéarisation* des formules trigonométriques (c'est à dire la transformation d'un produit de fonctions trigo en somme de fonctions trigo).

Par exemple, on a

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \frac{1}{2^3}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3\\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(2\cos 3\theta+3\times 2\cos\theta\right)\\
\cos^3\theta &= \frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{1}{4}\cos\theta
\end{aligned}$$

La linéarisation est souvent employée pour déterminer une primitive d'un produit de fonctions trigonométriques.

Section 7

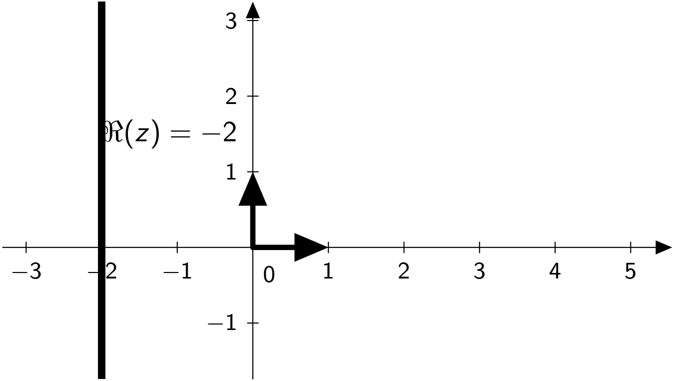
Applications

Définition

Considérons donc une fonction $f\ :\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, et un nombre réel k fixé. On appelle **ligne de niveau** k **de la fonction** f l'ensemble des points z de C tels que $f(z)=k$.

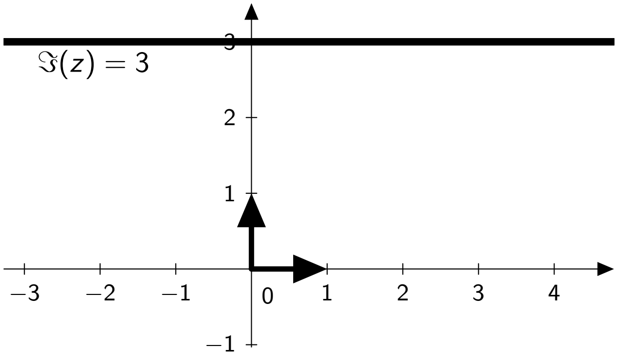
La partie réelle $\Re(z)$

La ligne de niveau k de la partie réelle correspond à la droite, parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x = k$.
Par exemple, voici représenté la ligne de niveau -2 de cette fonction :



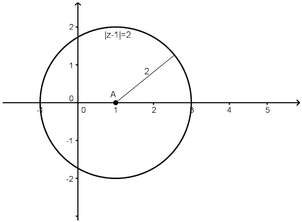
La partie imaginaire $\Im(z)$

La ligne de niveau k de la partie imaginaire correspond à la droite, parallèle à l'axe des abscisses, d'équation $y = k$.
Par exemple, voici représenté la ligne de niveau 3 de cette fonction :



Le module $|z-a|$

Soit a un nombre complexe d'image A et k un réel positif.
La ligne de niveau k du module $z \mapsto |z-a|$ correspond au cercle de centre A et de rayon k.
Par exemple, voici représenté la ligne de niveau 3 de $z \mapsto |z-1|$:



L'argument $\arg(z-a)$

Soit a un nombre complexe d'image A et θ un réel.
La ligne de niveau θ de l'argument $\arg(z-a)$ correspond à la demi-droite d'origine O et de vecteur directeur $\vec{t}$ tel que $(\vec{u};\vec{t})$ soit θ.
A est exclu de la demi-droite puisqu'il n'a pas d'argument.

Par exemple, voici représenté la ligne de niveau $\frac{\pi}{3}$ de $\arg(z+2)$