Dérivée d'un vecteur unitaire par rapport au temps

Vecteur unitaire

Définition : on appelle *vecteur unitaire*, un vecteur de **norme 1**.

Coordonnées polaires

En coordonnées polaire, un point M est donné par deux coordonnées (ρ, θ)
ρ est un réel supérieur ou égal à 0 et θ un angle, par exemple dans $]-\pi;\pi]$
Elles vérifient les relations :

$$x = \rho.cos(\theta) \text{ et } y = \rho.sin(\theta)$$

On note alors $\overrightarrow{u}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$

Cette relation est souvent notée dans un repère : $\overrightarrow{u}(\theta) = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$

Aussi le vecteur $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\sin(\theta) \end{pmatrix} = \rho\overrightarrow{u}(\theta)$

À retenir :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}(\theta)$$

En mécanique et en physique, cette formule est souvent notée :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}$$

Mais $\overrightarrow{u}$ *dépend toujours de* θ.
$\overrightarrow{u}$ est bien un *vecteur unitaire* car ses coordonnées vérifient $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

Dépendance au temps

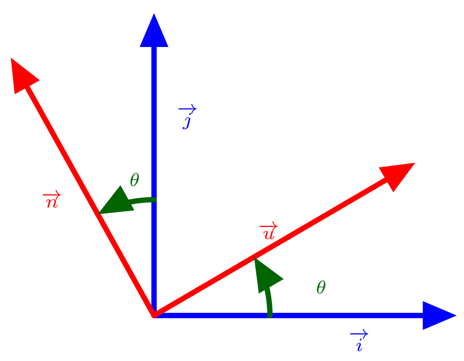
On considère un point $M(t) = \rho(t)\overrightarrow{u}(t)$ dont la position de M varie (de façon dérivable) avec le temps, et nous allons exprimer ces dérivées.
Soit $\overrightarrow{u}(t)$ un vecteur unitaire.
On a donc $\overrightarrow{u}(t) = \cos(\theta(t))\overrightarrow{i} + \sin(\theta(t))\overrightarrow{j}$
Les notations devenant pénibles, on simplifie un peu :

$$\overrightarrow{u}(t) = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$$

Rien n'a changé mais on n'ecrit plus (t) partout.
On pose, $\overrightarrow{n} = -\sin(\theta)\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\overrightarrow{j}$
On a alors :

- $\overrightarrow{n}$ est un vecteur unitaire (mêmes raisons que pour $\overrightarrow{u}$),
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux car leur produit scalaire est nul,
- la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n})$ est orthonormée et directe,

Pourquoi le noter $\overrightarrow{n}$ plutôt que $\overrightarrow{v}$? Parce que $\overrightarrow{n}$ est le vecteur *normal* à $\overrightarrow{u}$
Cela donne la figure ci-dessous.



L'objectif est d'exprimer *la dérivée* de ces vecteurs par rapport au temps.

Dérivée d'une composée

En mathématique, on note généralement : $(exp(u))' = u'exp(u)$

Avec les notations de Newton, cela s'écrit : $\dfrac{d\exp(u)}{dt} = \dfrac{du}{dt}\exp(u)$

L'intérêt des notations de Newton réside en la formule suivante :

Dérivée d'une composée : Si $u = u(\theta(t))$, alors :

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}$$

Pour calculer cette dérivée, il faut exprimer les dérivées de u par rapport à θ et de θ par rapport à t

Retour aux vecteurs

$$\vec{u}(t) = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j}$$

Donc $\quad \dfrac{d\vec{u}(\theta(t))}{dt} = \dfrac{d}{d\theta}\vec{u} \times \dfrac{d\theta}{dt} \qquad$ puis $\quad \dfrac{d\vec{u}}{d\theta} = \dfrac{d\cos\theta}{d\theta}\vec{i} + \dfrac{d\sin\theta}{d\theta}\vec{j}$

Dans cette dernière formule, on a *projeté* $\vec{u}$ sur la base $(\vec{i}, \vec{j})$

Avec les dérivées : $\cos' = -\sin$ et $\sin' = cos$ il vient :

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{n}$$

C'est une formule fondamentale qu'il faut apprendre par coeur.

Elle se résume ainsi :

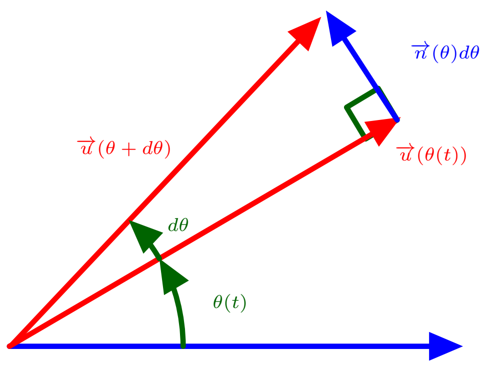
Dériver le vecteur $\vec{u}$ c'est obtenir le vecteur $\vec{n}$ qui est tourné de $\pi/2$ dans le sens positif

Appliquons la, à nouveau, au vecteur $\vec{n}$: $\quad \dfrac{d\vec{n}}{d\theta} = -\vec{u}$. $\quad$ On trouve ensuite : $\dfrac{d(-\vec{u})}{d\theta} = -\vec{n} \quad$ et $\quad \dfrac{d(-\vec{n})}{d\theta} = \vec{u}$

Application des formules de Taylor

On peut appliquer les *développements limités*, à l'ordre 1 ($\sin(x) = x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$) et on obtient :

$$\vec{u}(\theta + d\theta) = \vec{u}(\theta) + \vec{n}(\theta)d\theta$$



Cas plus général, tenant compte de la norme :

Pour l'instant on n'avait pas considéré le facteur ρ qui dépend aussi du temps. Dérivons $\rho(t)\overrightarrow{u(\theta(t))}$:

$\dfrac{d\rho\vec{u}(\theta)}{dt} = \dfrac{d\rho}{dt}\vec{u} + \rho\dfrac{d\vec{u}}{dt} = \dfrac{d\rho}{dt}\vec{u} + \rho\dfrac{d\theta(t)}{dt}\dfrac{d\vec{u}}{d\theta} = \rho'\vec{u} + \rho\theta'\vec{n}$

$$\frac{d(\rho\vec{u}(\theta))}{dt} = \rho'\vec{u} + \rho\theta'\vec{n}$$