Correction de certains exercices sur les lois continues

Cette correction vous permet de comparer vos résultats et de vous assurer de la justesse de vos raisonnements.
Dans la majorité des cas les calculs numériques ne sont pas détaillés.
Si vous repérez des erreurs, n'hésitez pas à m'en faire part.

Lois continues

Exercices du premier polycopié d'exercices, numéros 2 à 7

Exercice 2

1. La densité de probabilité d'une loi uniforme sur $[a,b]$ est $\frac{1}{b-a}$ donc celle de X est $f(x) = \frac{1}{12-8} = \frac{1}{4}$
2. En moins de 9 min 30 signifie que $X < 9.5$ donc on calcule $P(X < 9.5) = \frac{9.5-8}{4} = \frac{1.5}{4} = \frac{3}{8}$
3. Il rate le métro si la rame part de M2 avant 8h11. Sachant qu'elle part de M1 à 8h, elle arrive entre 8h08 et 8h12. Elle reste en quai une minute, donc il rate le métro si la rame arrive en M2 *avant 8h10*. C'est-à-dire si son trajet dure moins de 10 minutes.
   $P(X < 10) = \frac{10-8}{4} = 0.5$

Exercice 3

Notons X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0.1

1. $P(X > 10) = \exp(0.1 \times 10) = \mathrm{e}^{-1}$
2. On peut appliquer la propriété « sans vieillissement »de la loi exponentielle :
   $$P_{X>t}X > t + h = P(X > h)$$
   Aussi, $P_{X>10}X > 12 = P(X > 12 - 2) = P(X > 2) = \exp(-0.1 \times 2) = \exp(-0.2)$

Exercice 4

1. $P(X > 2500) = \exp(-0.0005 \times 2500) = \exp(-1.25)$. Réponse B
2. L'espérance d'une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$ Donc la durée de vie moyenne des robots est $\frac{1}{0.0005} =$ 2000. Réponse B

Exercice 5

1. On sait que X suit une loi exponentielle de paramètre λ donc $P(X < 5) = 1 - \exp(-5\lambda) = 0.675$
   Aussi $-5\lambda = \ln(1 - 0.675) \iff \lambda = -\frac{\ln 0.325}{5} \approx 0.225$ (arrondi à trois décimales)
2. (a) $P(X < 8) = 1 - P(X > 8) = 1 - \exp(-8\lambda) \approx 0.834$ (arrondi à trois décimales)
   (b) $P(X > 10) = \exp(-10 \times \lambda) \approx 0.106$
   (c) On applique la propriété sans vieillissement de la loi exponentielle :
   $P_{X>3}(X > 8) = P(X > 8 - 3) = P(X > 5) = 1 - 0.675 = 0.325$
3. L'espérance d'une loi exponentielle est $\frac{1}{\lambda} \approx 12.721$ ans.

Exercice 6

1. On applique la propriété sans vieillissement de la loi exponentielle :
   $P_{T\geq 1000}(T \geq 2000) = P(T \geq 1000) = 1 - P(T \leq 1000) = 1 - 0.095 = 0.905$
2. Déterminons d'abord λ : on a $P(T \geq 1000) = 0.905$ donc $\exp(-1000\lambda) = 0.905 \iff -1000\lambda = \ln 0.905 \iff \lambda = -\frac{\ln 0.905}{1000} \approx 0.0000998$
   Ensuite, on a $P(T \leq t_{1/2}) = 0.5 \iff P(T > t_{1/2}) = 0.5$
   $\iff \exp(-\lambda t_{1/2}) = 0.5 \iff -\lambda t_{1/2} = \ln 0.5 \iff t_{1/2} = -\frac{\ln(0.5)}{\lambda} \approx 6944$ heures.

Exercice 7

1. $P(T \leq t_{1/2}) = P(T > t_{1/2}) \Longleftrightarrow P(T > t_{1/2}) = 0.5 \Longleftrightarrow \exp(-\lambda t_{1/2}) = 0.5$
   $\Longleftrightarrow -\lambda t_{1/2} = \ln 0.5 \Longleftrightarrow t_{1/2} = -\dfrac{\ln 0.5}{\lambda}$
2. $t_{1/2} = 99 \Longleftrightarrow -\dfrac{\ln 0.5}{\lambda} = 99 \Longleftrightarrow -\dfrac{\ln 0.5}{99} = \lambda \approx 0.007$.
   Donc $P(100 \leq X \leq 200) = \exp(-100\lambda) - \exp(-200\lambda) \approx 0.25$

Exercice 9

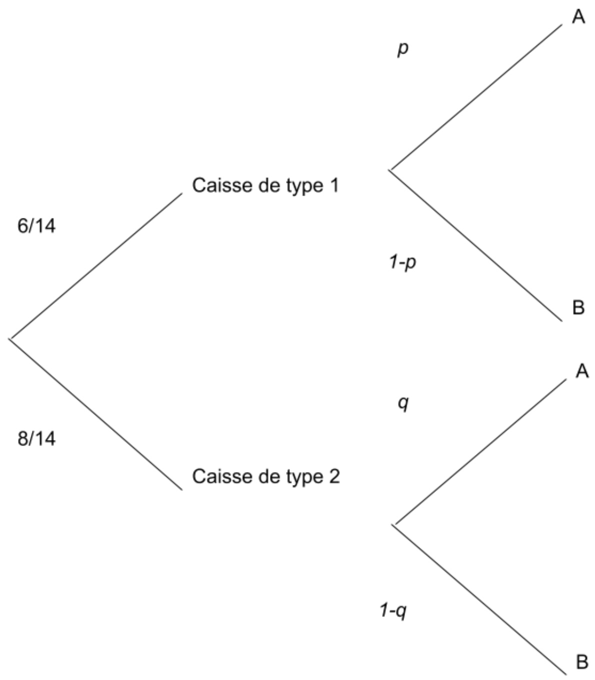
1. (a) $P(T_A \geq 300) = \mathrm{e}^{-\lambda \times 300} = \mathrm{e}^{-0.0004 \times 300} = \mathrm{e}^{-0.12} \approx 0.887$
   Nous venons de calculer la probabilité que le composant A n'ait pas connu de panne après 300 jours.
   (b) La machine fonctionne après 300 si les deux composants, indépendants n'ont pas connu de pannes.
   $P(\text{« la machine fonctionne »}) = P((T_A \geq 300) \cap (T_B \geq 300))$
   $= P(T_A \geq 300) \times P(T_B \geq 300) = \mathrm{e}^{-0.12} \times \mathrm{e}^{-0.12} \approx 0.787$
2. Cette fois il est plus facile de calculer d'abord la probabilité que la machine soit en panne. Cela se produit si les deux composants sont en panne.
   La probabilité qu'un composant soit en panne est $P(T_A < 300) = 1 - \mathrm{e}^{-0.12}$.
   La machine est en panne si les deux composants, indépendants sont en panne.
   $P(\text{« la machine est en panne »}) = P(T_A < 300) \times P(T_B < 300) = (1 - \mathrm{e}^{-0.12})^2 \approx 0.013$
   La probabilité que la machine fonctionne toujours est le complémentaire : 0.987

Exercice 11

1. $P(50 < D < 100) = \mathrm{e}^{-50\lambda} - \mathrm{e}^{-100\lambda} = \mathrm{e}^{-50/82} - \mathrm{e}^{-100/82} \approx 0.248$
2. La loi exponentielle est une loi *sans vieillissement* cela signfie que $P_{D>300}(D > 300 + 25) = P(D > 25) = \mathrm{e}^{-25\lambda} \approx 0.737$
3. C'est l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ donc $1/\lambda = 82$.
   La distance moyenne d_m parcourue sans incident est 82 km.
4. (a) X_{d_m} suit une loi binomiale de paramètres $n = 96$ et $p = P(D > d_m)$
   En effet, chaque autocar a un probabilité $p = P(D > d_m)$ de n'avoir connu aucun incident durant 82 km, les autocars sont indépendants et X compte le nombre d'autocars n'ayant connu aucun incident durant 82 km.
   (b) C'est l'espérance de cette loi exponentielle donc $E(X) = np$
   Calculons $p = P(D > 82) = \mathrm{e}^{-82\lambda} = \mathrm{e}^{-1}$
   Donc $E(X) = 96\mathrm{e}^{-1} \approx 35$. En moyenne 35 autocars n'ont pas connu dincident durant 82 km.

Exercice 12

1. (a) Pour les caisses du premier type, le paramètre est $\lambda = 0.05$ et la probabilité d'attendre plus de t (événément A) est $p = \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-0.05t}$.
   Pour les caisses du second type, le paramètre est $\mu = 0.1$ et la probabilité d'attendre plus de t (événément B) est $q = \mathrm{e}^{-\mu t} = \mathrm{e}^{-0.05t}$.



(b) $P(T \leq t) = \dfrac{6}{14}P_{\text{type1}}(B) + \dfrac{8}{14}P_{\text{type2}}(B) = \dfrac{6}{14}(1 - \mathrm{e}^{-0.05t}) + \dfrac{8}{14}(1 - \mathrm{e}^{-0.1t})$
$= 1 - \dfrac{6}{14}\mathrm{e}^{-0.05t} - \dfrac{8}{14}\mathrm{e}^{-0.1t}$

2. On applique la formule précédente aux différents cas proposés.
   (a) $P(t > 15) = 1 - P(t < 15) \approx 0.330$
   (b) $P(5 < t < 20) = P(t < 20) - P(t < 5) \approx 0.445$
   (c) $P(t > 20) = 1 - P(t < 10) \approx 0.470$

Exercice 13

1. (a) $P(T < 1) = 1 - \mathrm{e}^{-1/3} \approx 0.2835$
   (b) $P(T > t) = \mathrm{e}^{-t/3}$
2. (a) $P(A) = P(T > 1) \approx 0.7165$
   (b) $P(B) = P(T > 3) \approx 0.3678$
   (c) La loi exponentielle est sans vieillissement donc $P_A(B) = P(T > 2) \approx 0.5135$