Feuille d’exercices

Séries statistiques à deux variables 1/4

TP1 : *Exemple d'ajustement affine par la méthode de Mayer*

On fabrique en grande série une pièce dont une cote, exprimée en mm, doit se trouver dans l'intervalle de tolérance [51,8 ; 52,8]. En cours de fabrication, on prélève tous les quarts d'heure un échantillon pour lequel on calcule la valeur moyenne de cette cote. Le tableau suivant donne les résultats des deux premières heures de fonctionnement :

Durée xi (en heures)	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
Moyenne yi (en mm)	52,12	52,16	52,24	52,28	52,32	52,37	52,44	52,47

La durée de fonctionnement est exprimée en heures et centièmes d'heure.

1) Dessiner le nuage de points associé à ce tableau : on prendra un repère orthogonal où une heure est représentée en abscisse par 4 cm et 0,1 mm est représenté en ordonnée par 1 cm.
On représentera la partie du plan définie par : $0 \le x \le 4$ et $51{,}8 \le y \le 52{,}8$

2) Déterminer les valeurs exactes

a) des coordonnées des points moyens G_1 et G_2 des sous-nuages constitués des quatre premiers points et des quatre derniers ;

b) des coefficients a et b de l'équation $y = ax + b$ de la droite (G_1G_2).

3) On a établi par ailleurs que, lorsque la moyenne de la cote dans l'échantillon est m, toutes les pièces produites ont une cote dans l'intervalle $[m - d ; m + d]$ avec $d = 0{,}10$ mm.

a) Tracer dans le repère les droites d'équation $y = ax+b+d$ et $y = ax+b-d$.

b) En déduire le moment (arrondi en heures et dixièmes d'heure) à partir duquel la production risque de comporter des pièces dont la cote ne se situe plus dans l'intervalle [51,8 ; 52,8].

TP 2 : *Exemple d'ajustement affine par la méthode de Mayer et par la méthode des moindres carrés*

La société de Werloing a mis au point un nouveau logiciel de DAO destiné aux PME. Elle mène une enquête dans la région Provence-Alpes-Côte d'Azur auprès de cinq cents entreprises déjà équipées de micro-ordinateurs aptes à recevoir ce logiciel, pour déterminer à quel prix chacune de ces entreprises accepterait d'acquérir ce nouveau logiciel. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-après :

Prix proposé x_i (en francs)	Nombre y_i d’entreprises disposées à acheter le logiciel à ce prix
40000	60
36000	70
32000	130
28000	210
24000	240
20000	340
16000	390
12000	420
10000	440
8000	500

1) a) Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$

b) Utiliser la méthode de Mayer pour déterminer une équation d'une droite d'ajustement Δ_1 de la forme $y = mx + p$. Les coefficients m et p seront donnés par leur valeur décimale approchée respectivement à 10^{-4} près et à 10^{-1} près. Tracer Δ_1 sur le graphique.

2) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire.

3) Déterminer une équation de la forme $y = ax + b$ *de* la droite de régression Δ_2 de y par rapport à x par la méthode des moindres carrés. Les coefficients a et b seront donnés par.leur valeur décimale approchée respectivement à à 10^{-4} près et à 10^{-1} près. Tracer Δ_2 sur le graphique.

4) Les frais de conception du logiciel se sont élevés à 500 000 francs. Les frais variables par logiciel vendu sont supposés négligeables.

a) Déduire de l'ajustement par la méthode des moindres carrés, l'expression du bénéfice théorique réalisé en fonction du prix choisi x et calculer la valeur de x permettant d'obtenir le bénéfice théorique maximal. Quel est ce bénéfice ?

b) À partir des résultats de l'enquête et sans utiliser de droite d'ajustement, déterminer parmi la gamme des prix proposés celui qui permettra de réaliser le bénéfice maximal.

Feuille d'exercices

Séries statistiques à deux variables 2/4

<u>TP3 :</u> *Exemple d'ajustement se ramenant à un ajustement affine*

Dans cette activité, tous les résultats numériques seront donnés par leur valeur décimale approchée à 10^{-3} près, obtenu directement avec une calculatrice.

L'étude, durant les cinq dernières années, du nombre de passagers transportés annuellement sur une ligne aérienne a conduit au tableau ci contre :

Année	*Rang x_i de l'année*	*Nombre p_i de passagers*
1992	1	7550
1993	2	9235
1994	3	10741
1995	4	12837
1996	5	15655

1) On pose $y_i = \ln p_i$ où ln désigne le logarithme népérien.

a) Compléter après l'avoir reproduit le tableau suivant :

x_i	1	...
y_i	8,929	...

b) Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal du plan.
Peut-on envisager un ajustement affine de ce nuage ?

2) a) Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression D de y en x.

b) Déterminer le coefficient de corrélation r entre les deux variables y et x. Le résultat obtenu confirme-t-il l'observation faite au l) b) *?*

c) Déduire du a) une expression de p en fonction de x.

d) En admettant que l'évolution constatée se poursuive les années suivantes, utiliser la relation obtenue au c) pour estimer le nombre de passagers transportés en 1998.

<u>TP 4 :</u> *Exemple d'utilisation d'un lissage par la méthode des moyennes mobiles avant ajustement affine*

Les chiffres d'affaires trimestriels, pour les douze derniers trimestres, d'une entreprise fabriquant du matériel électronique sont donnés dans le tableau suivant

Rang du trimestre x_i	Chiffre d'affaires (en MF) : y_i
1	300
2	450
3	130
4	200
5	280
6	410
7	200
8	250
9	320
10	500
11	210
12	250

1) Représenter graphiquement le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra pour unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 100 MF sur l'axe des ordonnées.

2) Le nuage obtenu au 1) présente des écarts à peu près réguliers de part et d'autre d'une droite d'ajustement tracée au jugé. On effectue souvent dans ce cas un **lissage** du nuage en remplaçant les points par des points moyens.

*On peut utiliser la **méthode des moyennes mobiles** en remplaçant la série statistique précédente par la série des moyennes mobiles des ventes obtenue en calculant les moyennes sur quatre trimestres consécutifs et en les attribuant au quatrième trimestre. Établir la série des moyennes mobiles de l'entreprise de matériel électronique en complétant après l'avoir reproduit le tableau suivant :*

Rang du trimestre x_i	4	5	…
Chiffre d'affaires (en MF) y_i	270	265	…

b) Représenter sur la figure du 1) le nuage de points
$N_i(x_i, z_i)$ Les irrégularités du nuage des points M_i ont été atténuées.

Utiliser deux conventions différentes pour représenter les points M_i *et* N_i.

3) On considère la série des chiffres d'affaires obtenus après lissage à la question 2' a).

a) Déterminer la valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double de variables x et z.

b) Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression D de z en x. On donnera une équation de la forme $z = ax + b$ dans laquelle a est une valeur approchée à 10^{-2} près et b une valeur approchée à une unité près.

c) On admet que la tendance observée pendant les trimestres de rang 4 à 12 se poursuit. Donner le chiffre d'affaires prévisionnel pour les trimestres de rangs 13 et 14.

Exemple d'utilisation de la méthode de Mayer

Exercice 1 : *Contrôle de qualité*

Une machine-outil produit automatiquement des pièces cylindriques. Réglée initialement pour un diamètre de 8 mm, elle se dérègle en cours d'utilisation. Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de pièces que l'on pourra produire avant que leur diamètre n'atteigne 8,1 mm. Afin de contrôler la fabrication et de procéder aux réglages éventuellement nécessaires, on mesure le diamètre de la dernière pièce dans chaque série de dix pièces produites. Les résultats obtenus sont les suivants :

Numéro x_i de la pièce	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Diamètre y_i de la pièce (en mm)	8,00	8,00	8,01	8,01	8,02	8,03	8,03	8,04	8,05	8,06

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé à la série statistique précédente dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra pour origine le point de coordonnées (0, 8), pour unité, 1 cm pour dix pièces en abscisses et 1 cm pour 0,01 mm en ordonnées.
2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage. Placer le point G sur la figure.
3) a) Calculer les coordonnées du point moyen G_1 associé aux points du nuage ayant les cinq plus petites abscisses et les coordonnées du point moyen G_2 associé aux cinq autres points du nuage.
b) On prend la droite (G_1G_2) comme droite d'ajustement. La tracer.
c) Déterminer une équation de (G_1G_2) sous la forme $y = ax+b$.
4) Les pièces produites doivent avoir un diamètre de 8 mm, avec une tolérance de 0,l mm. Déterminer graphiquement le nombre de pièces que l'on pourra produire avant que le diamètre n'atteigne la valeur de 8,1 mm, puis calculer ce nombre à l'aide de l'équation trouvée au 3)c). (On arrondira à l'entier le plus proche.)

Exemples d'utilisation de la méthode des moindres carrés dans des exercices d'examen

Exercice 2 : *Des essais en laboratoire*

Le tableau suivant donne les résultats obtenus à partir de 10 essais de laboratoire concernant la charge de rupture d'un acier en fonction de sa teneur en carbone.

Teneur en carbone x_i	70	60	68	64	66	64	62	70	74	62
Charge de rupture y_i (en kg)	87	71	79	74	79	80	75	86	95	70

1) Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i).

On prendra en abscisse 1 cm pour une unité en représentant les abscisses à partir de la valeur 60.
On prendra en ordonnées 1 cm pour 2 kg, en représentant les ordonnées à partir de 70.

2) Calculer les coordonnées du point moyen de ce nuage.
3) Déterminer la valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique de variables x et y. Interpréter le résultat.
4) Déterminer une équation de la forme $y = ax + b$ de la droite D de régression de y en x par la méthode des moindres carrésOn donnera les valeurs approchées des coefficients a et b à 10^{-3} près. Tracer la droite D sur le graphique du 1).
5) Un acier a une teneur en carbone de 77. Donner une estimation de sa charge de rupture.

Exercice 3 : *Le prix de vente d'une machine*

Le tableau suivant indique le prix de vente en francs d'une machine et le nombre d'exemplaires vendus les quatre dernières années.

Rang de l'année	1	2	3	4
Prix de vente x_i (en francs)	2 000	1 400	1 800	2 500
Nombre y_i d'exemplaires vendus	198	240	222	160

l) Représenter le nuage des points Mi de coordonnées (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra pour origine du repère le point de coordonnées (1 400, 160), pour unité, 1 cm pour 100 F sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées. Vérifier qu'un ajustement affine paraît justifié.
2) Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Le placer sur la figure.
3) a) Déterminer une équation de la droite D de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront déterminés à 10^{-3} près.
b) Construire cette droite de régression sur le graphique du 1).
4) En quelle année a-t-on eu le chiffre d'affaires le plus élevé ? Quel est ce chiffre d'affaires ?
5) On suppose maintenant que, chaque année, le nombre d'exemplaires vendus y et le prix de vente x suivent la relation : $y = -0{,}08x + 349$.
On note $S(x)$ le chiffre d'affaires réalisé en vendant y machines valant chacune x francs.
a) Exprimer $S(x)$ en fonction de x.
b) Étudier les variations de la fonction S définie sur[1 400, 2 500] par $x \mapsto S(x)$
c) En déduire le prix de vente d'une machine l'année de rang 5 si l'on veut que la somme encaissée $S(x)$ soit maximale. Quel sera le nombre d'exemplaires vendus, à une unité près ? Quelle sera alors la somme encaissée ?

Exemples d'ajustements se ramenant à un ajustement affine (exercices d'examen)

Exercice 4 : *Consommation d'une voiture*

La consommation d'une voiture, *z*, est donnée en fonction de sa vitesse, *x*, par le tableau suivant :

x (en km/h)	80	90	100	110	120
z (en litres/ 100 km)	4	5	6,5	8	10

1) La consommation est-elle proportionnelle à la vitesse ? Justifier rapidement votre réponse.
2) Compléter le tableau ci-dessus, après l'avoir reproduit, par une ligne : $y = \ln z$ dont on donnera les valeurs approchées à 6 décimales (les meilleures possibles).
3) Dans un repère d'origine 0 ($xo = 70$; $yo = 1{,}30$ en prenant comme unités 1 cm pour 1 0 km/h en abscisse et 1 cm pour 0, 1 0 en ordonnée, représenter le nuage de 5 points $(x, y = \ln z)$.
4) Indiquer l'équation d'une droite d'ajustement pour les cinq points de coordonnées (x, y) du nuage, par la méthode des moindres carrés. Donner cette équation sous la forme $y = Bx + A$, avec les valeurs approchées de B et A (les meilleures possibles) à 3 décimales obtenues à la calculatrice programmable.
5) Estimer y pour une vitesse de 140 km/h.

Estimer la consommation aux 100 km pour cette vitesse de 140 km/h, à 0,5 L près comme dans le tableau initialement donné.

Exercice 5 : *Un problème d'électricité*

Au cours d'une expérience de physique, on a mesuré les variations de l'intensité I d'un courant, en milliampères, dans un circuit quand on a augmenté la tension U, en volts, aux bornes d'une lampe. Les résultats de cette étude expérimentale figurent dans le tableau suivant

Intensité (en mA) : I	36	51	81	100	132	155	175	200	222	250
Tension (en volts) : *U*	0,1	0,2	*0,5*	0,8	1,5	2	2,5	3	4	5

1) Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points de coordonnées (I, U) associé à cette série statistique double.

2) On se propose de réaliser un ajustement du nuage précédent par une courbe d'équation de la forme $U = kI^{\alpha}$

a) On pose $x = \ln I$ et $y = \ln U$.

Dresser le tableau des valeurs prises par les deux variables *x et y*. On fera figurer les valeurs approchées à 10^{-2} près.

b) Représenter dans un second repère orthogonal le nuage de points de coordonnées (x, y).

c) Déterminer la valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique de variables x *et* y. Peut-on envisager un ajustement affine de ce second nuage ?

d) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près des coefficients. Tracer cette droite dans le second repère.

e) Déduire du d) une expression de U en fonction de I de la forme $U = kI^{\alpha}$.

f) Quelle valeur peut-on prévoir pour la tension pour une intensité de 270 mA ?

(On donnera le résultat à 10^{-1} près.)