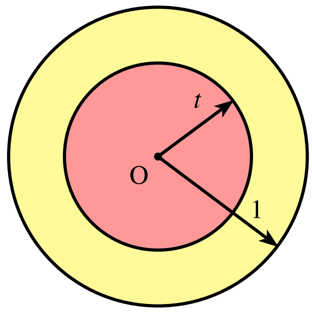
# Loi de probabilité à densité
# Loi normale

## EXERCICE 1

**A la recherche de la densité**

On tire au hasard sur une cible de rayon 1 m sans jamais la manquer.
X est la variable aléatoire qui donne la distance , en mètre, de l'impact au centre de la cible.
Ainsi, X prend ses valeurs dans l'intervalle [0 ;1].
Selon le modèle usuel, pour tout $t \in [0; 1]$, la probabilité de l'événement « $X \leqslant t$ » est définie par :




$$P(X \leqslant t) = \frac{\text{aire disque de rayon } t}{\text{aire de la cible}}$$

1) Pour tout $t \in [0, 1]$, on considère la fonction de répartition $F$ telle que : $F(t) = P(X \leqslant t)$. Exprimer $F(t)$ en fonction de $t$.
2) On note $f$ la densité sur [0 ;1] de la loi de X
   a) Écrire $F(t)$ sous la forme d'une intégrale.
   b) Justifier que $F$ est dérivable sur [0 ;1] et préciser sa dérivée.
   c) En déduire l'expression de la densité $f$. Représenter alors $\mathscr{C}_f$.

**Loi uniforme**

## EXERCICE 2

Une rame de métro relie deux stations $M_1$ et $M_2$ en un temps compris entre 8 et 12 minutes. On note X la durée du trajet lors d'une liaison.
On suppose que X suit une loi uniforme sur [8 ;12]

1) Quelle est la densité de probabilité de X ?
2) Calculer la probabilité que la rame relie les deux stations en moins de 9min 30s.
3) La rame quitte $M_1$ à huit heures et un usager arrive en $M_2$ à 8h11. La rame reste en gare une minute. Quelle est la probabilité que l'usager rate le métro ?

**Loi exponentielle**

## EXERCICE 3

On suppose que la durée de vie d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

1) Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie.

2) On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans. Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?

## Exercice 4

La durée de vie X, en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne, est modélisée par une loi de durée de vie sans vieillissement de paramètre $\lambda = 0,000\,5$.

1) La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

$$\text{A : } \quad e^{-\frac{2500}{2000}} \qquad \text{B : } \quad e^{\frac{5}{4}} \qquad \text{C : } \quad 1 - e^{-\frac{2500}{2000}} \qquad \text{D : } \quad e^{-\frac{2000}{2500}}$$

2) La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

A : 3 500    B : 2 000    C : 2 531, 24    D : 3 000

## Exercice 5

La durée de vie, en année, d'un composant électronique est une variable aléatoire notée T qui suit une loi sans vieillissement de paramètre $\lambda$. Une étude statistique à montrer que pour ce type de composant, la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0,675.

1) Calculer la valeur $\lambda$ arrondie à trois décimales.
2) Quelle est la probabilité, arrondie à trois décimales, qu'un composant de ce type dure :
   a) moins de 8 ans
   b) plus de 10 ans
   c) au moins 8 ans sachant qu'il fonctionne encore au bout de trois ans
3) Quelle est l'espérance de vie de ce composant.

## Exercice 6

La durée de vie T, en heure, d'un transistor suit une loi exponentielle telle que : $P(\mathrm{T} \leqslant 1000) = 0,095$

1) Calculer la probabilité conditionnelle : $P_{\mathrm{T} \geqslant 1000}(\mathrm{T} \geqslant 2000)$
2) Déterminer, à 1 h près, la durée $t_{1/2}$ telle que : : $P(\mathrm{T} \leqslant t_{1/2}) = 0,5$

## Exercice 7

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

1) Déterminer en fonction de $\lambda$ la valeur $t_{1/2}$ telle que : $P(\mathrm{X} \leqslant t_{1/2}) = P(\mathrm{X} \geqslant t_{1/2})$
2) On suppose que $t_{1/2} = 99$ . Calculer $P(100 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 200)$.

## Exercice 8

La durée de vie X, en année, d'un élément radioactif suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$

1) La demi-vie $t_{1/2}$ du carbone 14 est estimé à environ 5 568 ans, avec $t_{1/2}$ défini par $P(\mathrm{X} \leqslant t_{1/2}) = 0,5$.
   a) Calculer $P(\mathrm{X} < 1000)$.
   b) Déterminer, à un an près, la valeur de $x$ telle que : $P(\mathrm{X} < x) = 0,2$

2) La demi-vie du césium 137 est $t_{1/2} \simeq 30$ ans. Répondre aux mêmes questions que le carbone 14.

   **Remarque :** Le césium 137 est l'un des nombreux produits de fission de l'uranium et sans doute le plus connu pour avoir été utilisé dans les études hydrologiques et écologiques suite à une contamination générale de l'atmosphère induite, à partir de 1945, par l'utilisation des bombes atomiques et des essais nucléaires (puis l'accident de Tchernobyl) *Wikipédia*

## Exercice 9

Deux composants A et B sont montés en série sur une machine. La durée de vie (exprimée en jour) de l'un d'eux est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,4$.
La panne d'au moins l'un d'entre eux, A ou B, entraîne l'indisponibilité de la machine. Les pannes de A et B sont supposées indépendantes les unes des autres. On note $\mathrm{T_A}$ la durée de vie de A et $\mathrm{T_B}$ celle de B.

1) a) Calculer $P(\mathrm{T_A} \geqslant 300)$.
   b) Calculer la probabilité que la machine fonctionne après 300 jours.
2) On se place dans le cas où les composants A et B montés en parallèle. La machine n'est alors indisponible que si A et B sont en panne. Calculer la probabilité que la machine fonctionne après 300 jours.

## Exercice 10

X est une variable aléatoire qui suit une loi de durée de vie sans vieillisement de paramètre $k > 0$.
On désigne par $a$ un nombre tel que : $0 < a < 1$
L'objectif est de déterminer le plus grand entier $n$ tel que : $P(\mathrm{X} \leqslant n) \leqslant 1 - a$

1) Résoudre le problème algébriquement en exprimant $n$ en fonction de $k$ et de $a$.
2) On donne l'algorithme ci-dessous dont l'objectif est de déterminer $n$

   a) Quel est la fonction $f$ utilisée ?
   b) Tester cet algorithme pour les couple $(k; a)$ suivants :

      $(0,1\ ;\ 0,05)$; $(0,01\ ;\ 0,1)$; $(0,1\ln 2\ ;\ 0,2)$

      Comparer les résultats avec les valeurs exactes du 1). Pourquoi cette différence ?
   c) Modifier alors cet algorithme pour qu'il fonctionne.

**Variables** : $K, A$ : réels et $N$ : entier
**Entrées et initialisation**
    Lire $K, A$
    $0 \to N$
**Traitement**
    **tant que** $f(N) \leqslant 1 - A$ **faire**
        $N + 1 \to N$
    **fin**
**Sorties** : Afficher $N$

## Exercice 11

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs (chutes de pierres, présence ce troupeaux sur la route, verglas, etc.).
Un autocar part du dépôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance, en km, que l'autocar va parcourir jusqu'à ce que survienne un incident. On admet que D suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$.
Les résultats demandés seront arrondis à $10^{-3}$ près.

1) Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

   a) comprise entre 50 et 100 km ;
   b) supérieure à 300 km.

2) Sachant que l'autocar a déjà parcouru 300 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?

3) Quelle est la distance moyenne $d_m$ parcourue sans incident ? Justifier.

4) L'entreprise possède 96 autocars. Les distances parcourues par chacun d'eux sont des variables aléatoires de même loi exponentielle vue ci-dessus.

   Les incidents qui peuvent survenir aux autocars sont indépendants les uns des autres.

   Pour tout nombre $d > 0$, $X_d$ désigne la variable aléatoire qui donne le nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru $d$ kilomètres.

   a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $X_{d_m}$ ?
   b) Quel est, à une unité près, le nombre moyen autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru $d_m$ kilomètres ?

## Exercice 12

D'après une étude statistique sur la durée d'attente, en minute, aux vingt caisses d'un hypermarché :

- six caisses ont une durée d'attente qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$ ;
- les autres caisses ont une durée d'attente qui suit la loi exponentielle de paramètre $\mu = 0,1$.

Un client choisit une caisse au hasard. On note T sa durée d'attente, exprimée en minute.

1) On désigne par $t$ un nombre positif.

   On se propose de déterminer la probabilité $P(\mathrm{T} \leqslant t)$.

   a) Représenter la situation par un arbre pondéré.
   b) En déduire $P(\mathrm{T} \leqslant t)$.

2) Calculer à $10^{-3}$ près la probabilité que ce client attende

   a) moins d'un quart d'heure ;
   b) plus de 10 minutes ;
   c) entre 5 et 20 minutes.

## Exercice 13

Un fabricant vend un modèle de jouet électronique.
La variable aléatoire T qui indique la durée de vie, exprimée en année, d'un jouet pris au hasard dans la production, suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{3}$.
Pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte puis une valeur approchée à $10^{-4}$ près.

1) a) Quelle est la probabilité $p$ que le jouet ne fonctionne plus au bout d'un an ?
   b) On désigne par $t$ un nombre positif. Exprimer, en fonction de $t$, la probabilité $P(\mathrm{T} > t)$.

2) On a acheté un jouet de ce type.

   On note A l'événement « Le jouet n'a aucune défaillance pendant un an » et B l'événement « Le jouet n'a aucune défaillance pendant trois ans ».

   Calculer les probabilités $P(\mathrm{A})$, $P(\mathrm{B})$ puis $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$.