Développements limités

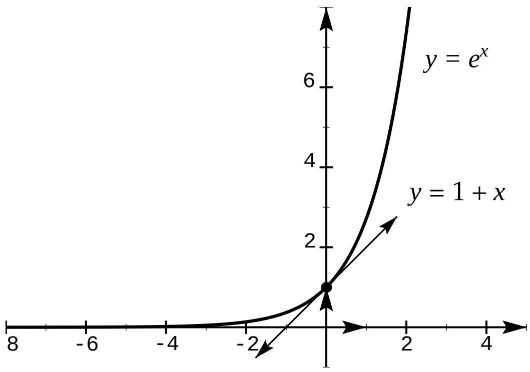
1. Fonction exponentielle

Vous savez déjà que la fonction exponentielle $f : t \mapsto e^t$ est dérivable, en particulier en $t = 0$, et que $f'(0) = 1$. En utilisant la définitio du nombre dérivé, cela peut s'écrire

$$\text{au voisinage de } t = 0, \text{ on a} \qquad \boxed{e^t = 1 + t + t\varepsilon(t) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0}.$$

(En fait, on a, au voisinage de $t = 0$, $f(t) = f(0) + t f'(0) + t\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.)

Ainsi, au voisinage de 0, e^t s'écrit comme la somme du polynôme $1 + t$ de degré 1 et du terme complémentaire $t\varepsilon(t)$ où $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.



Remarques :

- Pour t voisin de 0, le polynôme $1 + t$ fournit une valeur approchée de e^t.
- le polynôme $1 + t$ donne une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 0.
- Cette écriture permet aussi de déterminer $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t}$, puisque l'on a, pour tout $t \neq 0$,

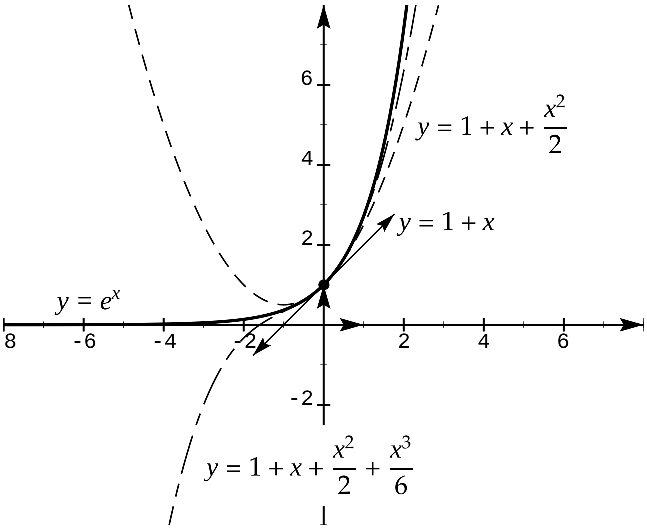
$$\frac{e^t - 1}{t} = 1 + \varepsilon(t) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

Le résultat ci-dessus se généralise, et on montre (cf par exemple le livre *Analyse, Algèbre linéaire, Nombres complexes* de Bernard Verlant aux éditions Foucher, 1997, pages 147–149) que l'on a, pour tout réel $t \in [-1, 1]$ et pour tout entier positif $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{e^t = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!} + t^n\varepsilon(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n\varepsilon(t) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.}$$

Cette écriture s'appelle le *développement limité d'ordre n de la fonction exponentielle au voisinage de* 0.

Les développements limités successifs en $x = 0$ pour la fonction exponentielle nous donnent ainsi des polynômes de degrés de plus en plus élevés approximant la fonction exponentielle au voisinage de 0 :



$P_1(x) = 1 + x$

$P_2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

$P_3(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$

2. Développement limité d'une fonction en 0

Soit f une fonction défini en 0 et sur un voisinage de 0.

On dit que f *admet un développement limité d'ordre n en* 0 s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ et une fonction ε tels que, sur un voisinage de $t = 0$, $f(t)$ peut s'écrire

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + t^n \varepsilon(t) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

Le polynôme $a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ est appelé *partie régulière* du développement limité d'ordre n de f en 0.

Remarques :

- On a $a_0 = f(0)$.
- On admettra que si un tel développement existe, il est unique.
- Le fait que $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$ signifi en particulier que, pour tout nombre positif d fi é, aussi proche de 0 que l'on veut, il existe un intervalle centré en 0 sur lequel $|\varepsilon(t)| < d$.

3. Développements limités des fonctions usuelles

On admettra que l'on a les développements limités suivants, au voisinage de 0 :

$\boxed{e^t = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!} + t^n \varepsilon(t)}$ soit $\boxed{e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0}$

$\boxed{\frac{1}{1+t} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \times \frac{t^i}{i} + t^n \varepsilon(t)}$ soit $\boxed{\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0}$

$\boxed{\ln(1+t) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-1} \times \frac{t^i}{i} + t^n \varepsilon(t)}$ soit $\boxed{\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0}$

$\boxed{\sin t = \sum_{p=0}^{n/2} (-1)^p \times \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)}$ soit $\boxed{\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0}$

$\boxed{\cos t = \sum_{p=0}^{n/2} (-1)^p \times \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)}$ soit $\boxed{\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + \cdots + t^{2p} \varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0}$

$$\boxed{(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0}$$

On admettra de plus que l'on peut additionner, multiplier, ou composer les développements limités (voir les exercices).

Exercices

Exercice 1 : Application immédiate des formules

Déterminer les développements limités en 0 à l'ordre 6 des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^x$ b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ c) $f(x) = \sin x$ d) $f(x) = \sin 2x$

Exercice 2 : Développement limité d'une somme

Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \sin t + \cos t - 1 \qquad \text{et} \qquad g(t) = e^t + e^{-t}.$$

Exercice 3 : Recherche de développements limités

Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 des fonctions f suivantes :

a) $f(t) = \dfrac{1}{1+2t}$

b) $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$

c) $f(t) = \ln\left(1+\dfrac{t}{2}\right)$

d) $f(t) = \ln(2+t)$

e) $f(t) = te^{2t}$

f) $f(t) = (2t+1)e^{-t+1}$

Exercice 4 : Développement limité d'un produit

Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction f défini sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-t}\sin t$.

Exercice 5 : Développement limité d'une composée de fonctions

Soit f la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\sin x}$.

1. Écrire le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $\sin t$. On le note (1).
2. Écrire le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction e^x. On le note (2).
3. On admet que la fonction f a un développement limité d'ordre 3 en 0 dont la partie régulière est obtenue de la façon suivante : dans la partie régulière du (2), on remplace chaque x par la partie régulière du développement (1) et on ne garde que les termes en t de degré inférieur ou égal à 3.

   Démontrer que le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction f est

$$e^{\sin t} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^3\varepsilon(t) \qquad \text{où} \qquad \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0.$$

Exercice 6 : Limites et développement limité

À l'aide de développements limités, déterminer les limites suivantes :

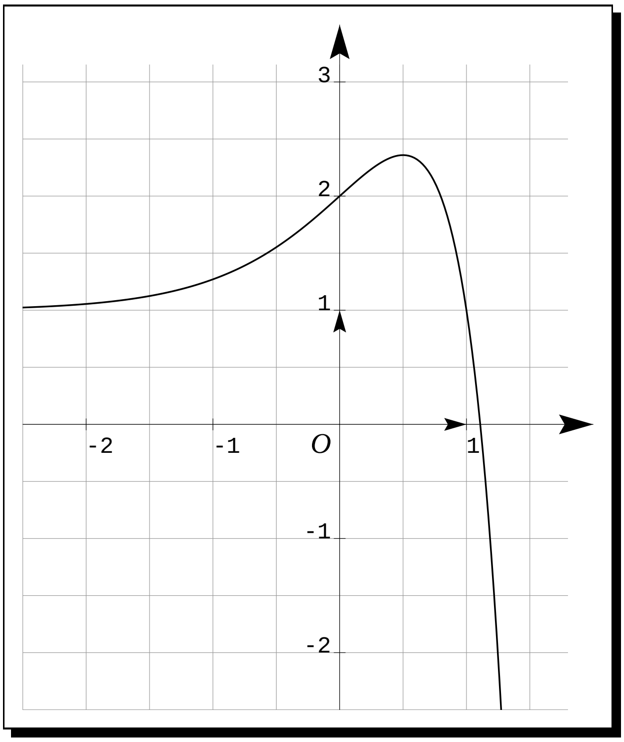
a) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}$ b) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 2t}{t^2}$

Exercice 7 : Développement limité et étude locale de fonction

Soit f la fonction de la variable réelle x défini sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{2x}(1-x) + 1.$$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm). La courbe C_f est donnée ci-dessous :



1. $a)$ Démontrer que le développement limité d'ordre 3 de f au voisinage de 0 est :

$$f(x) = 2 + x - \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

$b)$ En déduire une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

$c)$ Étudier la position de T par rapport à C_f au voisinage de ce point.

2. $a)$ Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_0^{1/2} e^{2x}(1-x)\,dx.$$

$b)$ Déduire de la question précédente la valeur exacte de l'intégrale

$$J = \int_0^{1/2} f(x)\,dx.$$

$c)$ Calculer la valeur exacte de l'intégrale

$$K = \int_0^{1/2} \left(2 + x - \frac{2}{3}x^3\right)\,dx.$$

$d)$ Vérifie que $0 < K - J < 6.10^{-3}$.

Exercice 8 : Recherche de développement limité – emploi pour l'étude locale d'une fonction

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où les unité sont 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Soit f la fonction défini sur $-1,+\infty[$ par

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)e^{2x}$$

et $\mathcal{C}$ sa coujrbe représentative dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Établir le tableau de variation de f.

2. *a*) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.

b) En déduire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 ; puis étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T au voisinage du point A.

3. Représenter la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente T dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On se propose de calculer la valeur exacte, en cm^2, de l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$.

4. Calculer l'intégrale

$$\int_0^2 f(x)\,dx.$$

On pourra au préalable déterminer les réels a et b tels que la fonction F défini sur $[-1,+\infty[$ par

$$F(x) = \left(ax^2+bx+c\right)e^{2x}$$

soit une primitive de la fonction f.

5. Donner la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

6. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de $\mathcal{A}$.

Exercice 9 : Un problème de synthèse

L'objectif de cet exercice est d'étudier la solution f définie sur $\mathbb{R}$, de la variable x, de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' + y = (2x+3)e^{-x}$$

vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

– Partie A - Résolution de l'équation différentielle –

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y' + y = 0$$

2. Vérifie que la fonction g défini sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x^2+3x)e^{-x}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de cette équation qui vérifi la condition initiale $f(0) = 1$

– Partie B - Étude de la solution f –

Soit f la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2+3x+1)e^{-x}.$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath}\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).

1. *Étude des variations de la fonction f*

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Étudier le sens de variation de f et établir son tableau de variation.

2. *Position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage du point A d'abscisse* 0.

a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 0.

b) Écrire le développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de 0. En déduire la position relative de C_f et de T au voisinage du point A.

c) Tracer C_f et T dans le repère $(O,\vec{\imath}\vec{\jmath})$.

3. *Calcul d'une aire*

a) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction h défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (2x+3)e^{-x}.$$

b) En se rappelant que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) et vérifi donc

$$f'(x) + f(x) = (2x+3)e^{-x}$$

et en utilisant le résultat de la question précédente, déterminer une primitive de f.

c) Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on pose :

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx.$$

Calculer $I(\alpha)$. Déterminer la limite de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces résultats.

Exercice 10 : Équation différentielle et étude de fonction, bts mai, *juin 2001*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A – *Résolution d'une équation différentielle* –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - 2y = e^{2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, défini et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E_0) \qquad y' - 2y = 0.$$

2. Soit h la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^{2x}$.
Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. Déterminer la solution générale de l'équation (E).

4. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifi la confitio $f(0) = -1$.

– Partie B – *Étude d'une fonction* –

Soit f la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{2x}$.

Sa courbe représentative C est donnée dans le repère de l'annexe (à rendre avec la copie).

1. *a*) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x} = 0$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu au *b*).

2. *a*) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (2x-1)e^{2x}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. *a*) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$, donner le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point.

d) Tracer T dans le repère de l'annexe.

– Partie C – *Calcul intégral* –

1. Soit α un réel strictement négatif ; on pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{0} f(x)\,dx$.

Démontrer que

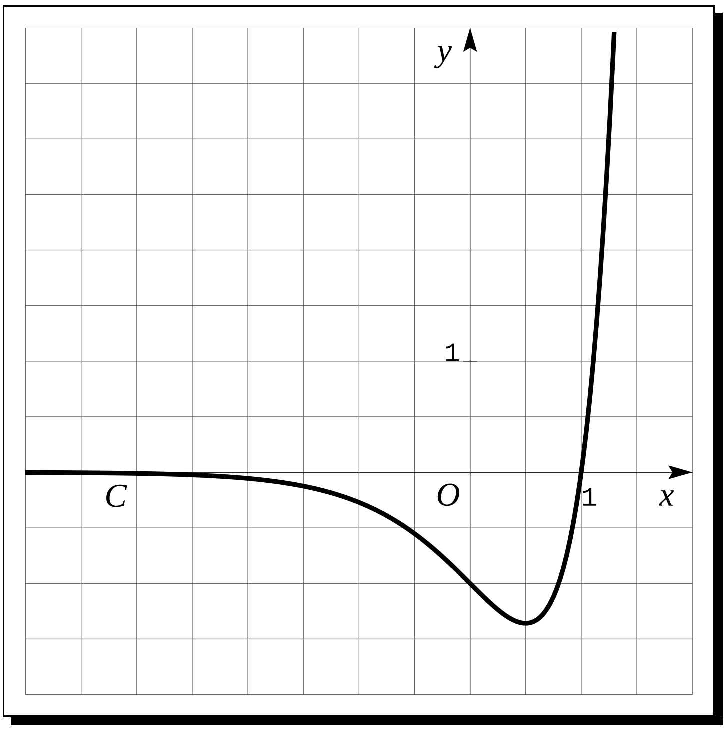
$$I(\alpha) = -\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4}\right)e^{2\alpha}.$$

On pourra effectuer une intégration par parties.

2. *a*) Calculer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$.

b) À l'aide d'une phrase, donner une interprétation graphique de ce résultat.

Annexe



Exercice 11 : Une équation différentielle d'ordre 2, *Bts Mécanique et Automatismes Industriels, 2000*

L'objectif de cet exercice est de résoudre une équation différentielle dont une solution particulière est susceptible de définir une fonction de densité en probabilités.

Les parties A. et B. peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 4y = -\frac{16}{3}e^{-2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, défini et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y'' - 4y = 0.$$

2. Vérifie que la fonction g défini sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

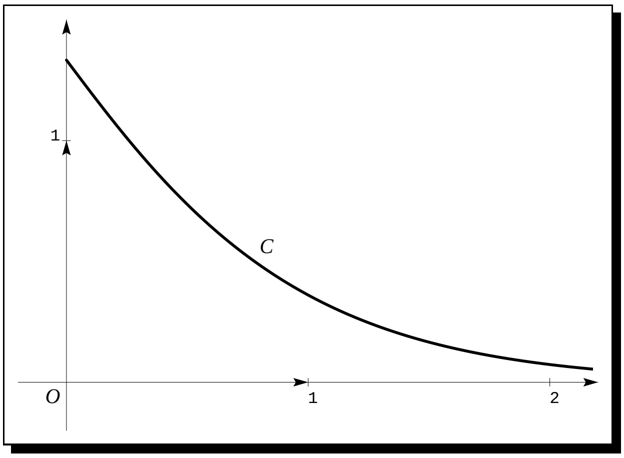
4. Déterminer la solution particulière h de l'équation différentielle (E) vérifian les conditions

$$h(0) = \frac{4}{3} \qquad \text{et} \qquad h'(0) = -\frac{4}{3}.$$

– Partie B – Étude d'une fonction –

Soit f la fonction défini sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4}{3}(1+x)e^{-2x}$$



Une représentation graphique C de f, dans un repère orthogonal, est donnée ci-dessus.

1. Le graphique suggère un sens de variation pour la fonction f. L'objet de cette question est de justifie ce résultat.

a) Démontrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{4}{3}(2x+1)e^{-2x}.$$

b) En déduire le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.

2. Le graphique permet d'envisager une asymptote en $+\infty$ pour la courbe C. À partir de l'expression de $f(x)$, déterminer une limite de f justifian cette propriété graphique.

3. *a*) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$, donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{-2x}$.

b) En déduire que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et t, pour x positif au voisinage de 0.

4. *a*) À l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de l'intégrale ;

$$I = \int_0^3 f(x)\,dx.$$

Donner une valeur approchée, arrondie au centième, de l'intégrale I.

Donner une interprétation graphique de l'intégrale I.

b) Sur l'écran d'une calculatrice, équipée d'un logiciel particulier (calcul formel), on lit le résultat suivant, où t est un nombre réel positif quelconque :

$$I = \int_0^t f(x)\,dx = \left(-\frac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t} + 1.$$

Ce résultat est admis ici et n'a donc pas à être démontré.

Déterminer

$$\lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t}.$$

c) Soit $A(t)$ l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées, la courbe C, et la droite d'équation $x = t$ où t est un nombre réel positif.

Déterminer $J = \lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$.

d) Déterminer la valeur exacte de $J - I$ où $I = A(3)$ a été calculé à la question **4.***a*), et en déduire la double inégalité : $0 \leqslant J - I \leqslant 10^{-2}$.

Donner, à l'aide d'une phrase, une interprétation graphique de $J - I$.

Exercice 12 : Mouvement amorti

Les deux parties peuvent se traiter indépendamment l'une de l'autre.

A Lors de l'étude d'un mouvement amorti, on étudie l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' + 4y' + 4y = 2,$$

où y est une fonction de t, défini et 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y'' + 4y' + 4y = 0$$

2. Montrer qu'il existe une fonction constante solution de (E).

3. Donner l'ensemble des solutions de (E).

B On étudie à présent la fonction f défini sur $[0, +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{1}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right) e^{-2t}.$$

1. *a*) Déterminer $f(0)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. (On rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.)

2. *a*) Déterminer la dérivée $f'(t)$ de la fonction f.

b) Étudier le signe de la dérivée $f'(t)$.

c) Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction f.

3. *a*) Montrer que le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction f est :

$$f(t) = 2t - 3t^2 + \frac{8}{3}t^3 + t^3\varepsilon(t) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t\to0} \varepsilon(t) = 0$$

b) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

4. Soit g la fonction défini sur $[0, +\infty[$ par

$$g(t) = f(t) - \frac{1}{2} \qquad \text{soit} \qquad g(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right) e^{-2t}.$$

Calculer, en utilisant une intégration par parties, l'intégrale

$$I = \int_0^2 g(t)\,dt.$$

Exercice 13 : Équation différentielle, développement limité, relations fonctionnelles

Les 3 parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - y' - 2y = (-6x - 4)e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable x, défini et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée première et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y'' - y' - 2y = 0$$

2. Soit h la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.
   Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation diférentielle (E)
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle E qui vérifi les conditions initiales :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 1.$$

– Partie B – Étude d'une fonction –

Soit f la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2e^{-x}$. Sa courbe représentative C dans un repère orthonormal est donnée sur la figur ci-après.

1. *a*) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu au *b*).
2. *a*) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
   c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. *a*) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.
   b) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) = 0.$$

   c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point.

– Partie C – Calcul intégral –

1. *a*) La fonction f défini dans la partie **B** étant une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' - y' - 2y = (-6x - 4)e^{-x},$$

   montrer que f vérifie pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f''(x) - f'(x) + (6x+4)e^{-x}\right].$$

   b) Soit F la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par :

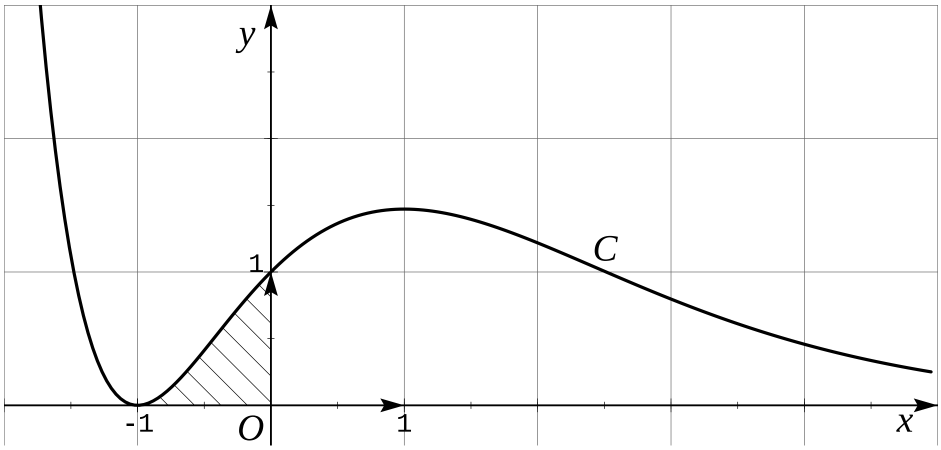
$$F(x) = \frac{1}{2}\left[f'(x) - f(x) - (6x+10)e^{-x}\right].$$

   Montrer que F est une primitive de f.
   c) Vérifie que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$F(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}.$$

2. Utiliser ce qui précède pour démontrer que l'aire A de la partie du plan hachurée sur la figur est, en unité d'aire,

$$A = e - 5.$$



Exercice 14 : Équation différentielle, *bts mai, session 2003*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

– Partie A - Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

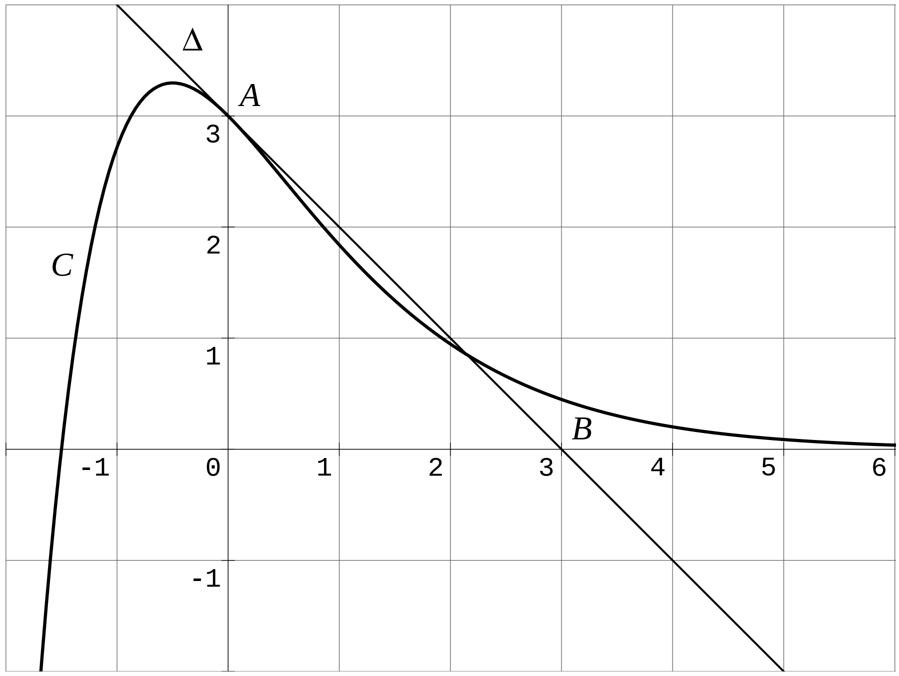
(E) $$y' + y = 2e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, défini et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.
2. Soit h la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2xe^{-x}$.
   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormal, passe par le point de coordonnées $(0, 3)$.

– Partie B - Étude d'une fonction –

1. La courbe C ci-dessous représente dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une fonction f défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont des nombres réels.
   La droite Δ est la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 0. Cette tangente passe par le point B de coordonnées $(3, 0)$.



a) Déterminer graphiquement $f(0)$.

b) Déterminer, graphiquement ou par le calcul, $f'(0)$.

c) Déterminer les valeurs des nombres réels a et b.

Dans la suite, on admet que f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x+3)e^{-x}.$$

2. *a*) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (-2x-1)e^{-x}$;

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$;

c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. (On ne cherchera pas les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.)

3. *a*) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

b) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

– Partie C - Calcul intégral –

1. La fonction f défini dans la partie **B** est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie **A**. Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}.$$

En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

2. On note $I = \displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx$.

a) Démontrer que $I = 5 - 6e^{-1/2}$.

b) Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.

3. On note $J = \displaystyle\int_0^{1/2} \left(3 - x - \frac{1}{2}x^2\right) dx$.

a) Démontrer que $J = 65/48$.

b) Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} de J.

c) Vérifie que les valeurs approchées obtenues ci-dessus pour I et J diffèrent de moins de 10^{-2}.