Équations différentielles d'ordre 1

Table des matières

1 Introduction

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue n'est plus un nombre, mais une fonction. Par exemple, résoudre l'équation différentielle

$$f' = f$$

consiste à rechercher toutes les fonctions égales à leur dérivée.
Pour des raisons historiques, on préfère noter y, au lieu de f, la fonction inconnue. Ainsi, l'équation différentielle ci-dessus est habituellement présentée sous la forme

$$y' = y.$$

2 Définitions – Notations

Dans tout ce paragraphe, a, b et c désignent trois fonctions connues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et y désigne la fonction inconnue, définie et dérivable sur l'intervalle I. On suppose de plus que la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I (c.à.d. $a(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$).

- Toute équation du type
$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x).$$
est appelée *équation différentielle linéaire du premier ordre*. Pour alléger l'écriture, on note généralement
$$(E) \qquad a(x)y' + b(x)y = c.$$
- Une *solution particulière* de cette équation est une fonction f, dérivable sur l'intervalle I, vérifiant
$$a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$$
pour tout x de l'intervalle I. La fonction f est également appelée *intégrale de l'équation différentielle*.
- *Résoudre* l'équation différentielle (E), c'est déterminer l'ensemble des fonctions solutions. On dit encore *déterminer la solution générale* de l'équation (E).
- La représentation graphique d'une solution de cette équation différentielle est appelée *courbe intégrale*.
- L'équation différentielle
$$(E_0) \qquad a(x)y' + b(x)y = 0$$
est appelée *équation « sans second membre » associée à l'équation* (E), ou encore *équation homogène associée à l'équation* (E).

3 Les principaux théorèmes

Tout d'abord, le théorème précisant qu'il n'est pas vain de chercher des solutions.

Théorème (Existence des solutions.)**.** Toute équation différentielle linéaire du premier ordre (E) admet une infinité de solutions.

Ensuite le théorème qui permet d'imposer à la solution de vérifier une condition initiale particulière.

Théorème (Existence et unicité de la solution particulière.)**.** Toute équation différentielle linéaire du premier ordre (E) admet une solution, et cette solution est unique si on lui impose en plus de vérifier une condition initiale donnée.

Enfin le théorème qui permet de décomposer la recherche des solutions en 2 étapes : recherche d'une solution particulière de (E) et recherche de la solution générale de l'équation homogène associée (E_0).

Théorème (Solutions de l'équation générale.)**.** La solution générale de l'équation

$$(E) \qquad\qquad a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

est obtenue en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de l'équation homogène (E_0) associée.

4 Résolution de l'équation sans second membre

Ce paragraphe donne la méthode générale pour résoudre l'équation sans second membre (E_0) dans le cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constant.
On a vu en Terminale le théorème suivant :

Théorème (Solutions de $y' = \alpha y$)**.** L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = \alpha y$, où α est un nombre réel fixé, est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = ke^{\alpha x}$$

où k désigne un réel quelconque.

En fait ce théorème se généralise, et on a le

Théorème (Résolution de l'équation homogène.)**.** Soit a une fonction donnée, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors les solutions de l'équation différentielle

$$y' = ay$$

sont toutes les fonctions définies sur I par

$$y(x) = ke^{A(x)}$$

où k désigne une constante réelle quelconque, et où A est une primitive quelconque de la fonction a.

5 Un autre exemple corrigé

On considère l'équation d'inconnue y :

$$(E) \qquad\qquad y' - 2xy = 2x$$

La résolution de cette équation passe par 3 étapes :

- *Résolution de l'équation homogène associée*
  On a

  $$(E_0) \qquad\qquad y' - 2xy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y' = 2xy.$$

  Avec les notations du théorème précédent, on a $a(x) = 2x$, dont une primitive est la fonction A définie par $A(x) = x^2$.
  Les solutions de (E_0) sont donc toutes les fonctions y ayant une écriture du type

  $$y = ke^{(x^2)} \text{ où } k \text{ constante réelle quelconque}$$

  Cette expression donne la *solution générale de* E_0.
- *Recherche d'une solution particulière de* (E)
  On remarque que la fonction constante y définie pour tout x par $y(x) = -1$ est une solution particulière de (E). En effet, on a alors $y'(x) = 0$ pour tout x, d'où

  $$y'(x) - 2xy(x) = 0 - 2x \times (-1) = 2x$$

  pour tout x. (En général dans les exercices, des indications sont données dans le texte pour vous permettre de trouver une telle solution particulière.)

- *Conclusion : solution générale de* (E)
  On peut alors conclure : l'équation (E) admet une infinité de solutions : toutes les fonctions y ayant une écriture du type
  $$y(x) = -1 + ke^{(x^2)} \text{ où } k \text{ est une constante réelle quelconque}$$
  Si maintenant on impose à la solution de vérifier une condition initiale donnée, alors on sait qu'il existe une et une seule solution. Il faudra alors déterminer la seule valeur de la constante k possible.
  Par exemple, si la solution f doit vérifier l'équation (E), mais aussi la condition $f(0) = 0$, on sera amener à une quatrième étape :
- *solution de* (E) *vérifiant la condition initiale donnée*
  Comme la fonction f est solution de l'équation différentielle (E), on sait que f est définie par une expression du type $f(x) = -1 + ke^{(x^2)}$ pour une certaine valeur de la constante k.
  Sachant que $f(0) = 0$, il vient la relation $0 = -1 + ke^0$, d'où la seule valeur possible pour la constante : $k = 1$.
  Finalement la fonction f cherchée est la fonction $f(x) = -1 + e^{(x^2)}$.

6 Exercices

Exercice 1. Une équation simple
On considère l'équation

$$(E) \qquad y' + y = 3$$

1. Déterminer une solution évidente de cette équation.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
   $$y' + y = 0.$$
3. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)

Solution. Une solution évidente de cette équation est $y = 3$. Or on sait depuis la classe de Terminale que les solutions de l'équation $y' + y = 0$ sont toutes les fonctions du type $y(x) = ke^{-x}$ où k est un réel quelconque. D'où la conclusion : les solutions de cette équation sont toutes les fonctions qui s'écrivent :

$$y(x) = ke^{-x} + 3$$

où k désigne un réel quelconque.

□

Exercice 2. Quelques équations sans second membre

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
   $$2y' + y = 0$$
2. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle
   $$xy' + y = 0$$
   (a) Déterminer les nombres réels a et b tels que l'on ait, pour tout réel x,
   $$\frac{1-x}{1+x} = a + \frac{b}{x+1}.$$
   (b) Résoudre sur $]-1, +\infty[$ l'équation différentielle
   $$(x+1)y' + (x-1)y = 0$$
3. Résoudre sur $]-1, +\infty[$ l'équation différentielle
   $$(1+t)x' + (t-1)x = 0$$

Exercice 3. Une solution particulière est donnée
On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + y = e^{-x}$$

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
   $$y' + y = 0$$

(b) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = xe^{-x}$$

est une solution particulière de (E).

(c) En déduire la solution générale de (E).

2. Déterminer la solution particulière de (E) prenant la valeur 3 en $x = 0$.

Exercice 4. Vitesse d'écoulement
Une comparaison à un modèle d'écoulement amène à considérer que la vitesse d'écoulement v_0 d'un liquide dans un tube cylindrique est solution de l'équation différentielle

$$4v' + v = 3e^{\frac{x}{2}} - 1$$

avec la condition initiale $v_0 = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle $4v' + v = 0$.
2. Déterminer les constantes A et B pour que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = Ae^{x/2} + B$$

soit une solution particulière de l'équation (E).

3. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer la solution particulière vérifiant $v(0) = 0$.

Exercice 5. Coefficients constants — Trouver le bon polynôme
Les questions **2.** et **3.** sont indépendantes de la question **1.**

1. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'(x) - y(x) = x^2 - x - 1$$

dans laquelle y est une fonction de la variable x, dérivable sur $\mathbb{R}$, et de fonction dérivée y'.

(a) Déterminer une solution particulière de l'équation (E) sous forme d'un polynôme.

(b) Déterminer la solution générale de l'équation (E).

(c) Quelle est la solution de (E) vérifiant la condition $y(0) = 1$?

2. Soit f, la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x - x^2 - x.$$

(a) Déterminer f' et f'', les dérivées premières et seconde de la fonction f. En déduire le tableau de variation de f'. (On précisera les limites de f' en $-\infty$ et en $+\infty$.)

(b) Déduire de la question précédente que l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est inférieure à $\ln 2$ et dont l'autre, notée x_0, est supérieure à $\ln 2$.

(c) Montrer que $f(x_0) = -x_0^2 + x_0 + 1$.

(d) Construire, dans un repère orthonormé (unité : 2 cm ou 2 grands carreaux), la courbe C et la droite D d'équations respectives

$$y = e^x \qquad \text{et} \qquad y = 2x + 1.$$

(e) Déduire du **2.**a) que C et D ont deux points communs

(f) Quelle est la plus petite des solutions de l'équation $f'(x) = 0$?

(g) Montrer qu'une valeur approchée à $0,01$ prés de x_0 est $\alpha = 1,25$.

3. (a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

(b) Étudier les variations de la fonction f.

(c) Tracer, sur un second graphique (muni d'un repère orthonormal de même unité que précédemment) :
- la parabole P d'équation $y = -x^2 - x$
- la courbe Γ représentant la fonction f. (On prendra pour valeur approchée de $f(x_0)$ une valeur approchée de $f(\alpha)$ à $0,1$ près).

Exercice 6. Équation à coefficients non constants
On considère l'équation différentielle

$$y' + xy = x^2e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée y'.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y' + xy = 0$$

2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit une solution particulière de (E).
3. Déduire des questions précédentes la solution générale de l'équation (E).

Solution. $f(x) = (x+1)e^{-x}$ □

Exercice 7. Équation à coefficients non constants
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (x^2+1)y' + 3xy = 0$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée y'.

1. Résoudre l'équation différentielle (E)
2. Déterminer la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 1$.

Exercice 8. Équation à coefficients non constants
On veut résoudre sur $]-1;+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1+x)y' - 2y = \ln(1+x).$$

1. Résoudre sur $]-1;+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad (1+x)y' - 2y = 0$$

2. Vérifier que la fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}$$

est une solution de (E).

3. Déduire des questions précédentes la solution générale de l'équation (E).
4. Déterminer la solution particulière de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

Exercice 9. Équation à coefficients non constants
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (x^4+1)y' - x^3y = x^5 - x^3 + 2x + 1.$$

1. Déterminer une fonction polynôme de degré 2, solution de l'équation (E).
2. Déterminer la solution générale de l'équation (E).

Exercice 10. Équation différentielle avec une exponentielle
Partie A – On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + y = 1 - e^{-x}$$

où l'inconnue y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et où y' est la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y' + y = 0$$

2. Déterminer une fonction numérique u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction définie par

$$x \mapsto y_0 = u(x)e^{-x}$$

soit solution de (E)

3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière g de (E) vérifiant la condition initiale $g'(0) = 0$.

Partie B – Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$$

et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité : 2 cm.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote D pour C.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Construire la droite D et la courbe C après avoir déterminé les coordonnées d'une dizaine de ses points à l'aide d'une calculatrice programmable.
4. (a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{2} (x+1)e^{-x}\,dx$$

(b) En déduire l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, de la partie du plan limitée par C, D et la droite d'équation $x = 2$.

(c) Donner un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude 10^{-2}.

Corrigé. **A.**

1. Le cours donne immédiatement que les solutions de l'équation (E_0) sont toutes les fonctions du type $y = ke^{-x}$, où $k \in \mathbb{R}$
2. On cherche maintenant une solution g de l'équation (E), où g peut s'écrire sous la forme $g(x) = u(x)e^{-x}$ pour une certaine fonction u. Guidé par notre expérience (et aussi par un coup d'œil sur le texte de la partie **B.**), nous essayons dans un premier temps de voir si un polynôme du premier degré peut convenir pour u :
   - On pose

   $$u(x) = ax + b \qquad \text{d'où} \qquad u'(x) = a, \qquad g(x) = (ax+b)e^{-x}, \qquad g'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}.$$

   En calculant $g' + g$, il vient alors

   $$g' + g = ae^{-x}$$

   On voit que si l'on veut obtenir une solution de (E), il faudra prendre $a = -1$ (et donc $g = -xe^{-x}$), mais cela ne suffira pas.
   - Après un peu de réflexion, on s'aperçoit qu'il faut ajouter une constante convenable et que la fonction g définie par $g(x) = 1 - xe^{-x}$ est une solution particulière de l'équation (E). Autrement dit, si on prend pour u la fonction définie par $u(x) = e^x - x$, alors la fonction g définie par $g(x) = u(x)e^{-x}$ est une solution particulière de (E) (car $(e^x - x)e^{-x} = 1 - xe^{-x}$).
3. L'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de (E_0). Ici on obtient donc pour solution de (E) toutes les fonctions g ayant une définition du type

$$g(x) = 1 + (k - x)e^{-x}, \qquad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}.$$

4. Si g est une solution de (E), on aura alors $g'(x) = (x - k - 1)e^{-x}$, et $g'(0) = -k - 1$. Pour avoir $g'(0) = 0$, il faut donc prendre $k = -1$, d'où la solution cherchée

$$g(x) = 1 - (x+1)e^{-x},$$

qui est bien la fonction proposée dans la deuxième partie du problème.

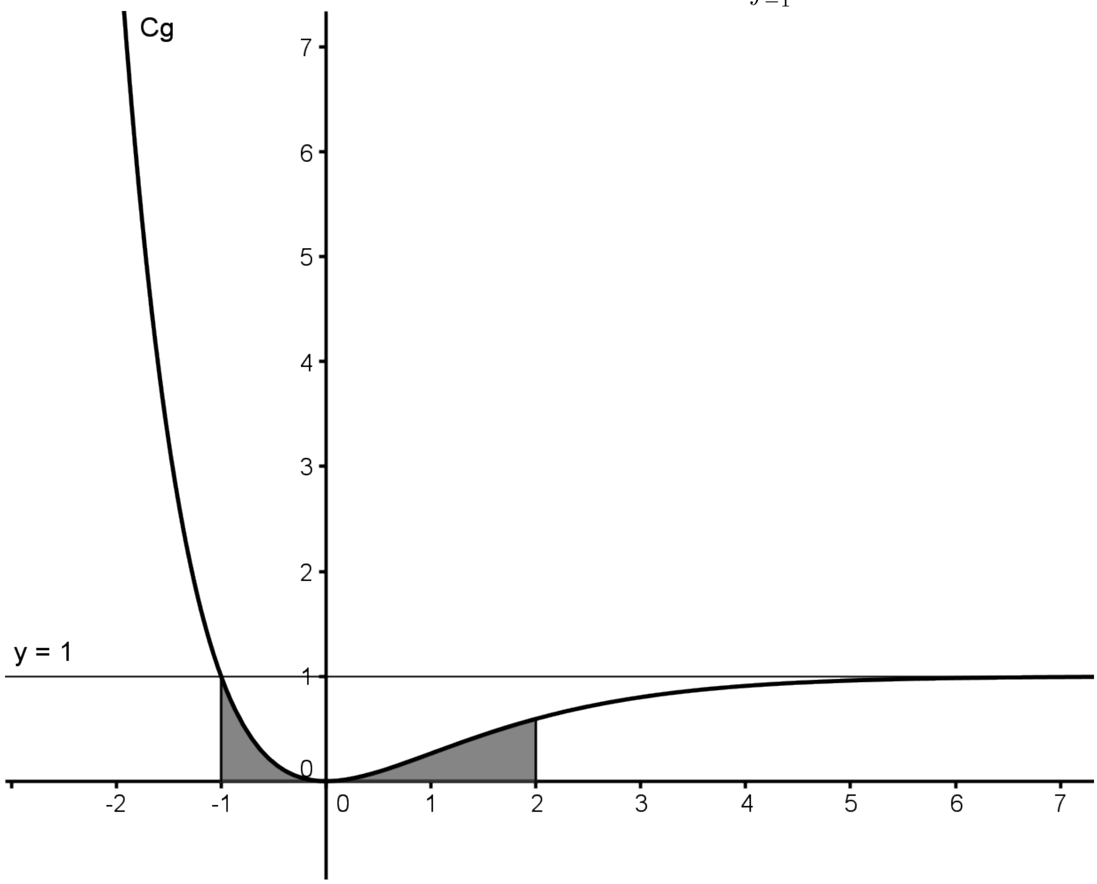
B. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad g(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$

1. On a évidemment $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$. Et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ puisque $g(x) = 1 - xe^{-x} + e^{-x}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ (cf cours). Pour la dernière limite, on peut également partir de l'écriture $g(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$ et invoquer le fait que lorsque x tend vers l'infini, l'exponentielle l'emporte sur le polynôme $(x+1)$.

2. On a $g'(x) = xe^{-x}$, qui est **toujours du signe de** x puisque l'exponentielle est toujours strictement positive. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

3. **La courbe de g, son asymptote $y = 1$ et** $\displaystyle\int_{-1}^{2} g(x)\,dx$



4. (a) Pour calculer l'intégrale I, on procède à une intégration par parties en posant $U = (x+1)$ et $V' = e^{-x}$, on a alors $U' = 1$ et $V = -e^{-x}$. Il vient alors

$$I = \int_{-1}^{2} (x+1)e^{-x}\,dx = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} -e^{-x}\,dx = -3e^{-2} - \left[e^{-x}\right]_{-1}^{2} = e - 4e^{-2} = I$$

   (b) L'intégrale I est une mesure, en unités d'aire, de $\mathcal{A}$. L'unité graphique étant de 2 cm sur Ox et 2 cm sur Oy, on a $\mathcal{A} = 4 \times (e - 4e^{-2})$, soit

$$\mathcal{A} = \left(4e - \frac{16}{e^2}\right) \text{cm}^2.$$

   (c) Un encadrement de $\mathcal{A}$ est donc, par exemple

$$0,70 \leq \mathcal{A} \leq 0,71$$

$\square$

Exercice 11. Équation différentielle du premier ordre à coefficients constants
Les deux parties sont indépendantes

Partie A - L'objectif de cette partie est la résolution de l'équation différentielle

(E) $$y' + y = e^{-x}$$

où y est une fonction, définie sur $\mathbb{R}$, de la variable x, et y' la dérivée de y.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad\qquad y' + y = 0$$

2. Déterminer le nombre réel a tel que la fonction g définie par $g(x) = axe^{-x}$ soit solution de (E).
3. Donner les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer la fonction f, solution de (E), qui vérifie $f(0) = 1$.

Partie B - L'objectif de cette partie est l'étude d'une fonction.
Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)e^{-x}.$$

Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Étudier les variations de la fonction f.

Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unités graphiques : 1 cm sur Ox et 10 cm sur Oy). *Note* : pour les unités graphiques, on pourra utiliser des grands carreaux plutôt que des cm.

Corrigé. **A.**

1. D'après le cours, les solutions de (E_0) sont toutes les fonctions y du type

$$y = ke^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. Si g est la fonction définie par $g(x) = axe^{-x}$, alors $g'(x) = (-ax + a)e^{-x}$, et on a $g' + g = ae^{-x}$. Pour que g soit solution de l'équation (E), il faut donc prendre $a = 1$.
La fonction g définie par $g(x) = xe^{-x}$ est alors une solution particulière de (E).
3. Pour avoir la solution générale de (E), il suffit d'ajouter une solution particulière de (E) à la solution générale de (E_0). Les solutions de (E) sont donc toutes les fonctions y du type

$$y = (x+k)e^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

4. Si f est une solution de (E), son écriture est de la forme $y = (x+k)e^{-x}$ pour une certaine constante réelle k. Comme $f(0) = k$ et que l'on veut $f(0) = 1$, on voit que la seule fonction répondant à la question posée est la fonction f définie par

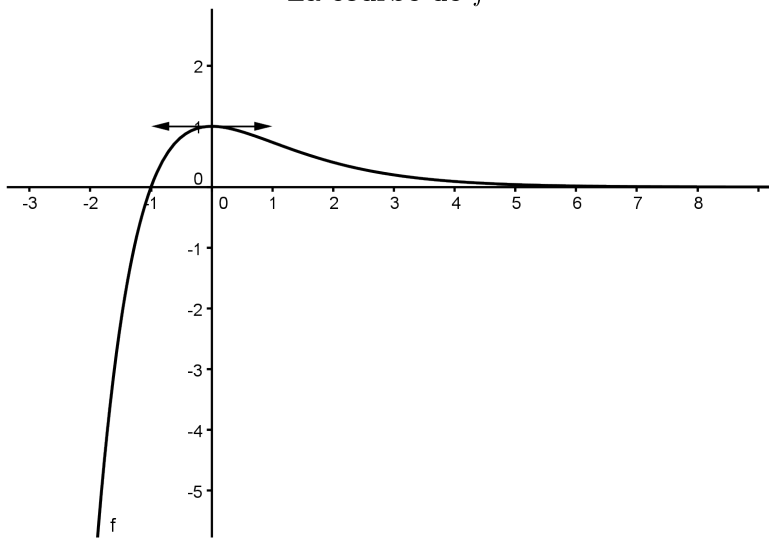
$$f(x) = (x+1)e^{-x}.$$

B.

1. En écrivant $f(x) = xe^{-x} + e^{-x}$, on a facilement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (car $\lim\limits_{-\infty} xe^{x} = 0$, cf formulaire).
2. En $-\infty$, la limite n'est pas indéterminée, et on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
3. On a $f'(x) = -xe^{-x}$, du signe de $-x$ car l'exponentielle est toujours positive. D'où le tableau de variations et la courbe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

La courbe de f



□

Exercice 12 (Équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants)**.** On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy' - y = -x^2 e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et où y' est la dérivée de y.

1. Vérifier que la fonction s, définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $s(x) = xe^{-x}$ est solution de l'équation (E).
2. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad xy' - y = 0$$

3. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$.
4. Déterminer la solution particulière g de (E) sur $]0, +\infty[$ vérifiant la condition $g(1) = 1 + \frac{1}{e}$

Corrigé. 1. Si la fonction s est définie par $s(x) = xe^{-x}$, alors $s'(x) = (1-x)e^{-x}$. Il vient alors

$$xs' - s = (x - x^2 - x)e^{-x} = -x^2 e^{-x}.$$

Ce qui prouve que la fonction s est bien une solution particulière de (E).

2. Il vient

$$(E_0) \qquad xy' - y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y' = \frac{1}{x} y.$$

Le cours nous dit que les solutions de (E_0) sont toutes les fonctions du type $y = ke^{A(x)}$ où $k \in \mathbb{R}$ et A primitive de $1/x$. Autrement dit, les solutions de (E_0) sont toutes les fonctions y qui s'écrivent

$$y(x) = ke^{\ln x}, \quad k \in \mathbb{R}, \qquad \text{soit encore} \qquad y(x) = kx, \quad k \in \mathbb{R}$$

puisque $\ln x$ est une primitive de $1/x$ et que $e^{\ln x} = x$.

3. Pour avoir la solution générale de (E), il suffit d'ajouter une solution particulière de (E) à la solution générale de (E_0). En utilisant les questions précédentes, on obtient que les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions y ayant une écriture de la forme

$$y(x) = x(k + e^{-x}), \quad k \in \mathbb{R}.$$

4. Si g est solution de (E), alors g est définie par une expression du type $g(x) = x(k + e^{-x})$ pour un certain réel k. On a alors $g(1) = k + \frac{1}{e}$. Pour avoir la solution g cherchée, il faut donc prendre $k = 1$ pour obtenir

$$g(x) = x(1 + e^{-x}).$$

□

Exercice 13. Équation différentielle du premier ordre avec un cosinus
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad 3x' - 2x = -20\cos 2t$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et où x' est la fonction dérivée de x.

1. (a) Résoudre l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad 3x' - 2x = 0$$

   (b) Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme

$$x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t.$$

   (c) Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la solution particulière f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

Corrigé. 1. (a) On a $3x' - 2x = 0 \iff x' - \frac{2}{3}x = 0$. Les solutions de (E_0) sont donc toutes les fonctions x ayant une écriture du type $x(t) = ke^{\frac{2t}{3}}$ où k désigne une constante réelle quelconque.

(b) Si $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$, alors $x'(t) = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t$. En reportant dans l'équation (E), il vient alors
$$3x' - 2x = (6B - 2A)\cos 2t - (6A + 2B)\sin 2t = -20\cos 2t.$$
En identifiant les coefficients des deuxièmes et troisièmes membres, et en simplifiant par 2, on obtient le système
$$\begin{cases} 3B - A &= -10 \\ 3A + B &= 0 \end{cases} \Longrightarrow_{(L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2)} \begin{cases} 10B &= -30 \\ 3A + B &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B &= -3 \\ A &= 1 \end{cases}$$
d'où la solution particulière de (E) cherchée $x(t) = \cos 2t - 3\sin 2t$.

(c) Pour avoir la solution générale de (E), il suffit d'additionner la solution générale de (E_0) à une solution particulière de (E). Ici, les solutions de (E) sont toutes les fonctions x ayant une écriture du type
$$x(t) = \cos 2t - 3\sin 2t + ke^{\frac{2t}{3}}$$
où k désigne une constante réelle quelconque.

2. Si f est une solution de (E), alors f possède une écriture comme celle donnée ci-dessus, et on a alors $f(0) = 1+k$. Si on a $f(0) = 0$, c'est donc que $k = -1$, et la solution particulière f cherchée s'écrit
$$x(t) = \cos 2t - 3\sin 2t - e^{\frac{2t}{3}}$$

□

Exercice 14. Équation du premier ordre à coefficients constants
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x' - 4x = 2e^{3t}$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et où x' est la fonction dérivée de x.

1. Résoudre l'équation différentielle
$$(E_0) \qquad x' - 4x = 0$$
2. Déterminer une solution particulière h de (E) sous la forme $h(t) = ae^{3t}$ où a est une constante réelle à déterminer.
3. En déduire la solution générale de (E).
4. Déterminer la solution particulière f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

Corrigé.

D'après le cours, la solution générale de (E_0) est l'ensemble des fonctions ayant une écriture du type $x(t) = ke^{4t}$ où k est une constante réelle quelconque.

Posons $h(t) = ae^{3t}$, alors $h'(t) = 3ae^{3t}$, et $h' - 4h = \big(3a - 4a\big)e^{3t} = -ae^{3t}$. Pour avoir une solution particulière de (E), on doit donc prendre $a = -2$, soit $h(t) = -2e^{3t}$

Est donc solution de (E) toute fonction ayant une écriture du type
$$x(t) = -2e^{3t} + ke^{4t},$$
k étant une constante réelle quelconque.

Si f solution de (E), alors f est définie par une expression du type $f(t) = -2e^{3t} + ke^{4t}$ pour une certaine valeur de la constante k. Comme on a $f(0) = 0$, cela implique donc $-2 + k = 0$ c'est à dire $k = 2$. Finalement, la solution cherchée est donc définie sur R par $f(t) = -2e^{3t} + 2e^{4t}$, soit encore $f(t) = 2e^{3t}(e^t - 1)$

□

Exercice 15. La solution particulière est une fonction affine
On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$(E) \qquad xy' + (x-1)y = x^2.$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et y' sa dérivée première.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction affine g définie par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E).

2. Résoudre l'équation sans second membre

$$(E_0) \qquad xy' + (x-1)y = 0.$$

3. En déduire la solution générale de (E).
4. Déterminer la solution particulière f_1 telle que : $f_1(1) = (e+1)/e$.

Exercice 16. La solution particulière est une fonction exponentielle
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy' - 2(x+1)y = 2e^{2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et y' sa dérivée première.

1. Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad xy' - 2(x+1)y = 0.$$

2. Déterminer le réel α tel que la fonction g définie par $g(x) = \alpha e^{2x}$ soit solution de (E).
3. En déduire, sur $]0,+\infty[$, la solution générale de (E).
4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(1) = -3e^2/4$.

Exercice 17. Équation sans second membre
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1+x^2)y' + 2xy = 0$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et y' la fonction dérivée de y..

1. Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$.

Exercice 18. Éqution différentielle, intégration : un problème de synthèse
On considère, sur $]0,+\infty[$, l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - 2\frac{y}{x} = x$$

où y représente une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée première y'.

1. (a) Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation

$$(E_0) \qquad y' - 2\frac{y}{x} = 0.$$

   (b) Rechercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$y(x) = \alpha x^2 \ln x.$$

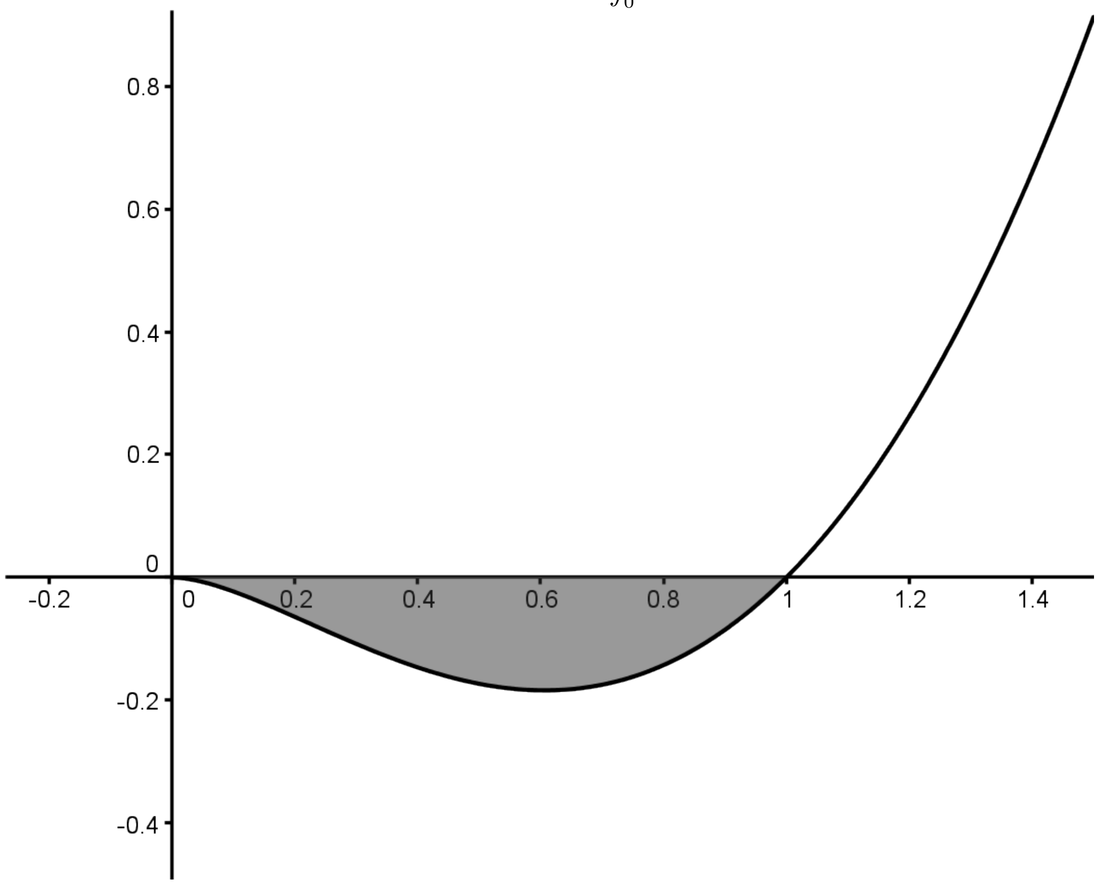
   où α est une constante réelle à déterminer.

   (c) Donner la solution générale de (E).
   (d) Déterminer la solution de (E) dont la représentation graphique passe par le point $A(1,0)$.
2. On définit sur $]0,+\infty[$ la fonction f par :

$$f(x) = x^2 \ln x.$$

   La représentation graphique de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal :

La courbe de f et $\int_0^1 f(x)\,dx$



(a) Calculer $f'(x)$.

(b) Étudier les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

(c) Étudier les variations de la fonction f et résumer les conclusions dans un tableau.

3. (a) En effectuant une intégration par parties, calculer

$$I(\lambda) = \int_\lambda^1 x^2 \ln x\,dx$$

où λ est un réel tel que $0 < \lambda \leq 1$.

(b) Déterminer $\lim_{\lambda \to 0} I(\lambda)$.

(c) En déduire l'aire, en mm^2, de la partie du plan hachurée sur la figure ci-dessus.

Corrigé. 1. Le cours nous dit que les solutions de l'équation

$$(E_0) \qquad y' = \frac{2}{x} y$$

sont toutes les fonctions y ayant une écriture du type $y(x) = ke^{2\ln x}$ où k est un réel quelconque, puisque $2\ln x$ est une primitive de $2/x$. Cette écriture peut se simplifier en remarquant que $2\ln x = \ln x^2$, et que $e^{\ln x^2} = x^2$. Ainsi, les solutions de l'équation (E_0) sont toutes les fonctions y ayant une écriture du type $y(x) = kx^2$ où k est un réel quelconque.

2. Posons $y(x) = \alpha x^2 \ln x$, on aura alors $y'(x) = 2\alpha x \ln x + \alpha x$. Il vient alors

$$y' - \frac{2}{x} y = 2\alpha x \ln x + \alpha x - 2\alpha x \ln x = \alpha x.$$

Pour que y soit une solution de (E), il faut donc prendre $\alpha = 1$, d'où la solution particulière de (E) cherchée : $y(x) = x^2 \ln x$.

3. Pour avoir la solution générale de (E), il suffit d'additionner la sol ;ution générale de (E_0) à une solution particulière de (E). En utilisant les deux questions précédentes, on obtient la solution générale de (E)

$$y(x) = x^2(k + \ln x) \qquad \text{où } k \text{ est un réel quelconque}$$

(a) Si la représentation graphique de l'une des solutions f de (E) passe par le point $A(1, 0)$, c'est que l'on a $f(1) = 0$. Or, si y est une solution de (E), on a $y(1) = k$ d'après la solution précédente. La solution cherchée est donc la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

(b) Le calcul de la fonction dérivée donne $f'(x) = 2x \ln x + x$, soit $f'(x) = x(1 + 2 \ln x)$, qui est du signe de $1 + 2 \ln x$ puisque $x > 0$. Or

$$1 + 2 \ln x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x \geq -1/2 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq e^{-1/2} = 1/\sqrt{e},$$

d'où le tableau de variation de la fonction f :

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-0.5e^{-2}	$\nearrow$	$+\infty$

puisque l'on a $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$ et $\lim_{0} f(x) = 0$ et $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ d'après le cours de terminale (« En 0 ou en $+\infty$, les polynômes l'emportent sur la fonction ln »).

4. (a) En effectuant une intégration par parties où l'on pose $V' = x^2$ et $U = \ln x$, il vient $V = x^3/3$ et $U' = 1/x$. D'où

$$\int_\lambda^1 x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 \frac{x^2}{3} \, dx = -\frac{1}{3}\left(\lambda^3 \ln \lambda + \frac{1}{3}\left[x^3\right]_\lambda^1\right) = -\frac{1}{3}\left(\lambda^3 \ln \lambda + \frac{1}{3}(1 - \lambda^3)\right)$$

soit finalement $I(\lambda) = -\frac{1}{9} + \frac{\lambda^3}{3}(\frac{1}{3} - \ln \lambda)$.

(b) Comme en 0, le polynôme l'emporte sur la fonction ln, on a $\lim_{\lambda \to 0} I(\lambda) = -\frac{1}{9}$.

(c) La fonction f étant négative sur l'intervalle $[\lambda, 1]$, l'aire hachurée est donnée, en unité d'aire, par le calcul de $-\int_\lambda^1 f(x) \, dx$. Et comme l'unité d'aire est de $32 \times 40 = 1280^2$, on en déduit l'aire $\mathcal{A}$ cherchée :

$$\mathcal{A} = \frac{1280^2}{9} \simeq 142,3^2$$

$\square$