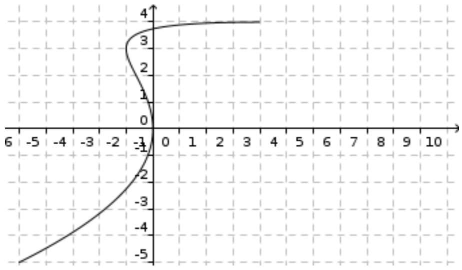
COURBES PARAMÉTRÉES

1) INSUFFISANCE DES FONCTIONS À VALEURS DANS ℝ

Comme vous le savez, par une fonction à valeurs dans ℝ, un réel donné ne possède qu'une seule image.
La conséquence graphique est que la courbe représentant une fonction à valeurs dans ℝ ne peut pas couper deux fois une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Une représentation comme celle-ci est donc impossible :



Ainsi, nous allons chercher à interpréter la courbe ci-dessus comme la représentation graphique d'un autre type de fonction.

2) DÉFINITION

Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur un même intervalle I de ℝ.

La fonction $\vec{F}$ qui, à tout t de I, associe le couple $(f(t), g(t))$ est une fonction à valeurs dans $ℝ^2$.

La fonction $\vec{F}$ est dérivable en t_0 de I si et seulement si les deux fonctions f et g sont dérivables en t_0.

Si $\vec{F}$ est dérivable en tout t de I, la fonction dérivée $\vec{F}\,'$ de $\vec{F}$ est la fonction définie sur I par $\vec{F}\,'(t)=(f\,'(t), g\,'(t))$

Plus généralement, pour étudier $\vec{F}$, on est conduit à mener une étude conjointe de deux fonctions f et g et à dresser un tableau de variations de ces deux fonctions.

La représentation graphique de $\vec{F}$ dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ est l'ensemble des points M d'abscisse $f(t)$ et d'ordonnée $g(t)$, c'est à dire l'ensemble C des points M tels que $\overrightarrow{OM}=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}$ lorsque t parcours l'intervalle I.
Cet ensemble C est défini par la donnée de :

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases},\ t\in I$$

On dit qu'il s'agit d' **<u>une représentation paramétrique</u>** de C.

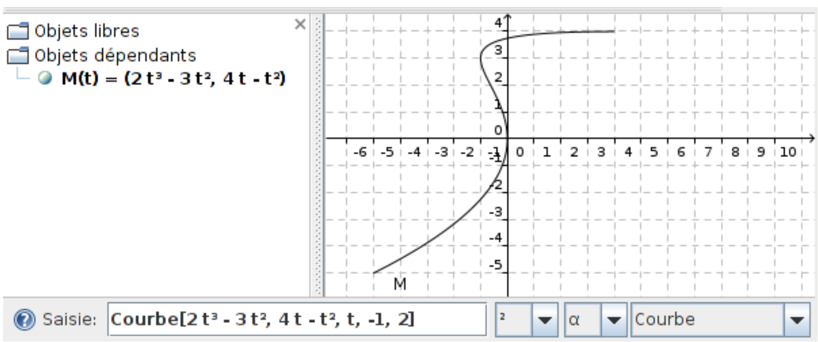
En interprétant **<u>le paramètre</u>** t comme le temps, **<u>une courbe paramétrée</u>** représente le mouvement d'un point dans le plan.

L'ensemble des points du plan atteints par le mouvement est appelé **<u>support</u>** ou **<u>trajectoire</u>**.

<u>Exemple :</u>

Ci-contre, une capture d'écran réalisée avec GeoGebra.

- Déterminer la fonction représentée par cette courbe.



- Caractériser la représentation paramétrique de cette courbe.

2) TANGENTE EN UN POINT

<u>Définition :</u>

Soit C la courbe définie dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases},\ \text{où } t \text{ appartient à un intervalle } I \text{ de } ℝ.$$

Le vecteur $\vec{V}(t)$, de cordonnées $f\,'(t)$ et $g\,'(t)$, est appelé **<u>vecteur dérivé</u>**.

Si $\vec{V}(t_0)$ n'est pas le vecteur nul, alors la courbe C a une **<u>tangente</u>** en $M(t_0)$ dont $\vec{V}(t_0)$ est **<u>un vecteur directeur</u>**.

Remarques :

- $\vec{V}(t_0) \neq \vec{0}$ si et seulement si
- Si C a une tangente en $M(t_0)$ et si $f'(t_0) \neq 0$, alors le coefficient directeur de cette tangente est
- Le vecteur $\vec{V}(t)$ est aussi appelé **vecteur vitesse**.
- Si $\vec{V}(t_0) = \vec{0}$, nous ne disposons d'aucune information sur l'existence éventuelle d'une tangente à C . On dit que $M(t_0)$ est **un point stationnaire**. C'est un point d'arrêt sur le trajectoire.

3) ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Soit la courbe paramétrée définie sur $[-2\,;3]$ par $\begin{cases} f(t) = 2t - 3t^2 \\ g(t) = 4t - t^2 \end{cases}$

On en déduit le tableau ci-dessous :

t	
$f'(t)$	
$f(t)$	
$g(t)$	
$g'(t)$	

En plaçant quelques points caractéristiques et les vecteurs directeurs associés, on obtient :