COURBES PARAMÉTRÉES

Exercice 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique 1 cm) . À tout nombre réel t de l'intervalle $[-1;2]$ on associe le point $M(t)$ de coordonnées $x=f(t)=2t^3-3t^2$ et $y=g(t)=4t-t^2$.
On note C la courbe ensemble des points $M(t)$ obtenues lorsque t varie dans $[-1;2]$.

1) Étudier les variations des fonctions f et g sur $[-1;2]$.
Reproduire et compléter le tableau des variations conjointes suivants.

t	-1 0 1 2
$f'(t)$	
$f(t)$	
$g(t)$	
$g'(t)$	

2) Préciser les tangentes aux points $M(-1)$, $M(0)$, $M(1)$ et $M(2)$ (obtenus pour $t=-1$, $t=0$, $t=1$ et $t=2$)

3) Construire ces tangentes et la courbe C .

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique 2 cm) . À tout nombre réel t de l'intervalle $[-1;3]$ on associe le point $M(t)$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x=f(t)=t^2 \\ y=g(t)=t^2-3t \end{cases}$$

On note C la courbe ensemble des points $M(t)$ obtenus lorsque t varie dans $[-1;3]$.

1) Étudier les variations des fonctions f et g sur $[-1;3]$.
Reproduire et compléter le tableau des variations conjointes suivants.

t	-1 0 $\frac{3}{2}$ 3
$f'(t)$	
$f(t)$	
$g(t)$	
$g'(t)$	

2) Préciser les tangentes aux points $M(-1)$, $M(0)$, $M\left(\frac{3}{2}\right)$ et $M(3)$

3) Construire ces tangentes et la courbe C .

Exercice 3 : *Une courbe de Bézier*

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique 2 cm) , on considère les points :

$$P_0(2{,}0)\ ;\ P_1(1{,}3)\ ;\ P_2(-2{,}0)$$

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;1]$, on considère le point $M(t)$ défini par :

$$\overrightarrow{OM}(t)=(1-t)^2\,\overrightarrow{OP_0}+2t(1-t)\,\overrightarrow{OP_1}+t^2\,\overrightarrow{OP_2}$$

On note C la courbe ensemble des points $M(t)$ obtenues lorsque t varie dans $[0;1]$.

1) Démontrer que les coordonnées x et y des points M de cette courbe ont pour expression :

$$x=f(t)=-2t^2-2t+2 \quad \text{et} \quad y=g(t)=-6t^2+6t$$

2) Étudier les variations de f et g sur $[0;1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

3) a) Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe C en chacun des points P_0 et $P_{\frac{1}{2}}$ et tracer ces tangentes.
Placer le point P_1 .

b) Tracer la courbe C .

La courbe C est une courbe de Bézier dont P_0 , P_1 et P_2 sont « les points de contrôles».
La courbe C est un cas particulier d'un modèle de base intervenant dans les logiciels de conceptions assistées par ordinateur (CAO) utilisés notamment en mécanique, en aéronautique et dans l'industrie automobile.
Pierre Bézier (1910-1999) ingénieur chez Renault, est un des premiers à avoir imaginé ces modèles, au début des années soixantes.