Intégration d'une fonction numérique

Table des matières

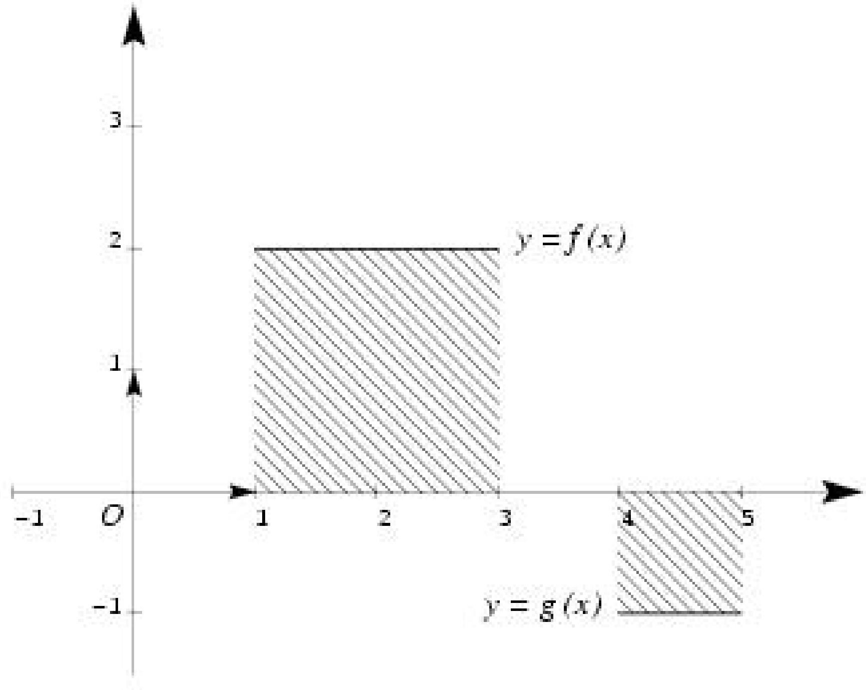
Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On désignera par a et b deux nombres fixés quelconques de l'intervalle I.

1 Introduction

Intuitivement, et historiquement, la notion d'*intégrale* d'une fonction numérique provient de la notion de calcul d'aire. Le problème à l'origine étant de calculer l'aire d'un domaine plan limité par une courbe.
Au fil des siècles, on s'est aperCcu que ce problème était exactement l'*inverse* du problème qui consistait à chercher la tangente en un point à une courbe donnée.
Si je devais donner une définition de l'*intégrale d'une fonction sur un segment* à partir de l'approche historique, je donnerais la définition suivante :

On appelle *intégrale d'une fonction continue f sur le segment* $[a,b]$, et on note $\int_a^b f(x)\,dx$, une mesure *orientée*, en unité d'aire, de l'aire du domaine plan limité par la courbe de la fonction f, l'axe Ox et les droites verticales d'équations respectives $x=a$ et $x=b$.
$= 80$mm
Ainsi, si f et g sont les fonctions constantes respectivement définies par

$$f : \begin{array}{rcl} [1,3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{rcl} [4,5] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -1 \end{array}$$



$$\text{Alors} \qquad \int_1^3 f(x)\,dx = 4 \qquad \text{et} \qquad \int_4^5 g(x)\,dx = -1$$

Malheureusement, cette définition nous emmènerait dans des méandres calculatoires complexes pour montrer comment on peut calculer une intégrale donnée. Aussi nous partirons de la définition abstraite de l'intégrale à partir des primitives d'une fonction.

2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

2.1 Primitive

On rappelle qu'une *primitive de la fonction f sur I* est une fonction F, dérivable sur I, et telle que

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pour tout } x \in I$$

On admettra que :

1. Toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives sur cet intervalle.
2. Si F et G sont deux primitives de f sur l'intervalle I, alors F et G ne diffèrent que d'une constante. Autrement dit, il existe un nombre réel k tel que

$$F(x) - G(x) = k \qquad \text{pour tout } x \in I$$

En vertu du dernier point, on peut donc affirmer que le nombre $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive de f choisie. Il ne dépend que de f et des nombres a et b choisis.

2.2 Définitions : Intégrale, Intégrale indéfinie

1. Si F est une primitive de la fonction f, on appelle *intégrale de f sur* $[a,b]$ le nombre $F(b) - F(a)$. On note

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

2. Pour désigner une primitive *générique* de la fonction f (c'est à dire un représentant de l'ensemble des primitives de f), on utilise la notation
$$F = \int f(x)\,dx \qquad \text{ou} \qquad F = \int f\,dx$$
et on parle de *l'intégrale indéfinie* de la fonction f.

2.3 Exemple

$\displaystyle\int_0^3 4\,dt = [4t]_0^3 = 4\times 3 - 4\times 0 = 12$ $\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{3}\,dx = \left[\frac{1}{3}\times\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$ $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$

$\displaystyle\int dt = [t]$ $\displaystyle\int \cos t\,dt = [\sin t].$

3 Intégrale dont la borne dépend d'un paramètre

Au vu de la définition de l'intégrale, si f désigne une fonction continue sur l'intervalle I, et si $a \in I$, alors la fonction F définie sur I par
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
est la primitive de la fonction f qui s'annule en a.
Par exemple, si F est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par
$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$
alors F est la fonction logarithme népérien ln

4 Quelques propriétés de l'intégrale

4.1 Relation de Chasles

4.1.1 Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a, b, c 3 réels quelconques de l'intervalle I. Alors
$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

4.1.2 Exemple

$$\int_{-1}^2 |x|\,dx = \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^2 x\,dx = \frac{5}{2}$$

4.2 Théorème : Linéarité et antisymétrie

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a, b, 2 réels quelconques de l'intervalle I. Alors
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

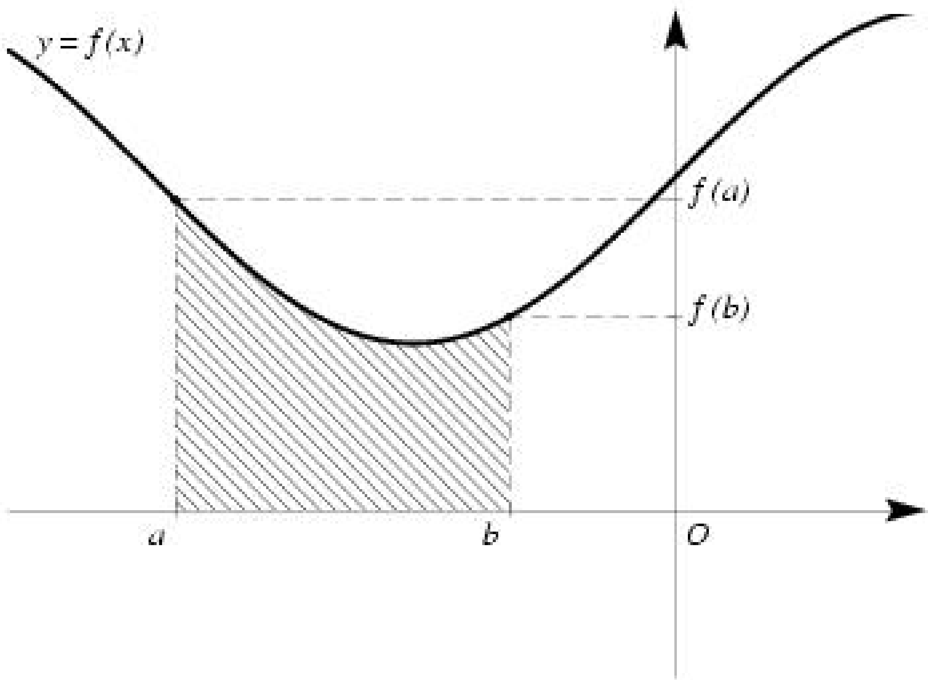
4.2.1 Théorème : linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit α et β deux réels quelconques. Alors
$$\int_b^a \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha\int_b^a f(x)\,dx + \beta\int_b^a g(x)\,dx$$

4.2.2 Exemple

$$\int_0^{\pi/2} (3\cos t + \sin t)\,dt = 3\big[\sin t\big]_0^{\pi/2} + \big[-\cos t\big]_0^{\pi/2} = 3 + 1 = 4$$

5 Interprétation géométrique dans le cas d'une fonction de signe constant



Si f est en plus une fonction *positive* sur l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\, dx$$

où $\mathcal{A}$ désigne l'aire du domaine plan limité par la courbe de f, l'axe Ox et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.
Si f est de signe constant négatif sur l'intervalle $[a, b]$; alors on a

$$\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\, dx$$

où $\mathcal{A}$ désigne toujours l'aire du domaine plan limité par la courbe de f, l'axe Ox et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

Remarque

l'aire $\mathcal{A}$ est exprimée en unités d'aire. Dans un repère orthonormal $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'unité d'aire est l'aire du carré défini par les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ du repère.

6 Comparaison d'intégrales

6.1 Théorème : Signe de l'intégrale d'une fonction de signe constant

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.

i) Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \geq 0$.

ii) Si $f \leq 0$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \leq 0$.

6.2 Conséquence : Intégration d'une inégalité

Soit f et g 2 fonctions continues sur un intervalle $I = [a, b]$.

$$\text{Si} \quad f \leq g \quad \text{sur} \quad I \qquad \text{alors} \qquad \int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt$$

6.3 Corollaire : Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b]$. S'il exite des réels m et M tels que

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{pour tout } x \in I \qquad \text{alors} \qquad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

6.4 Corollaire : Majoration de la valeur absolue d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b]$. S'il existe un réel M tel que

$$|f(x)| \leq M \quad \text{pour tout } x \in I \qquad \text{alors} \qquad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M|b-a|$$

7 L'inégalité des accroissements finis

Les théorèmes de comparaison d'intégrales permettent d'obtenir des encadrements d'une fonction lorsqu'on sait encadrer sa dérivée.

7.1 Théorème : inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction dont la dérivée f' est continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. S'il existe deux réels m et M tels que, pour tout x de $[a, b]$, on ait

$$m \leq f'(x) \leq M \qquad \text{alors} \qquad m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

En particulier,

$$\text{Si} \quad |f'(x)| \leq M \qquad \text{alors} \qquad |f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$$

7.2 Remarque

Ce théorème a de nombreuses applications. La plus classique consiste à l'utiliser lors de l'étude de certains algorithmes de calculs de valeurs approchées de racines d'équations. Il permet de *garantir* la précision apportée après un nombre donné d'itérations...

8 Primitives des fonctions usuelles

La lecture du tableau des dérivées usuelles dans le sens f' vers f permet d'obtenir les primitives des fonctions usuelles. Dans le tableau ci-dessous, f est une fonction définie sur un intervalle I, et F est une primitive de f sur I. (Toute fonction G définie par une relation du type $G(x) = F(x) + C$, avec C constante réelle est donc une autre primitive de la fonction f.)

fonction $f(x)$	primitive $F(x)$	Domaine de validité
k	kx	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in^*$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in -\{1\}$	$\frac{1}{-n+1} \times \frac{1}{x^{n-1}} = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$	$]-\infty, 0[\quad \text{ou} \quad]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1x^{\alpha+1}}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x = 1 + \tan^2 x}$	$1 + \tan^2 x$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
x	x	$\mathbb{R}$
x	x	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	]-1, 1[
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

De même, par lecture inverse du tableau des dérivées d'une composée de fonctions, on déduit le tableau ci-dessous (dans lequel on a parfois omis la variable pour des raisons de lisibilité).

fonction f (x)	primitive $F(x)$	hypothèse
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	
$g(ax+b)$	$\frac{1}{a}G(ax+b)$	où g continue sur I et G primitive de g
$u'u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	où $u \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	où $u \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}, n \in^* -\{1\}$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$	où $u \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	où $u > 0$ sur I
$u'u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$	où $u > 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	

9 Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. La dérivée du produit uv est

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{d'où} \qquad u'v = (uv)' - uv'.$$

Les fonctions u et v sont dérivables, donc continues ; si de plus u' et v' sont continues, alors les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)'$ sont continues, donc intégrables.
Si a et b sont deux éléments de I, on a alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \int_a^b (uv)'(t)\,dt - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt,$$

soit encore, si on choisit uv comme primitive de $(uv)'$,

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt,$$

exemple

On désire calculer l'intégrale $I = \int_0^1 te^t\,dt$. On pose $u'(t) = e^t v(t) = t \qquad \text{d'où} \qquad u(t) = e^t v'(t) = t$ et il vient

$$\int_0^1 te^t\,dt = \left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt = e - \left[te^t\right]_0^1 = 1.$$

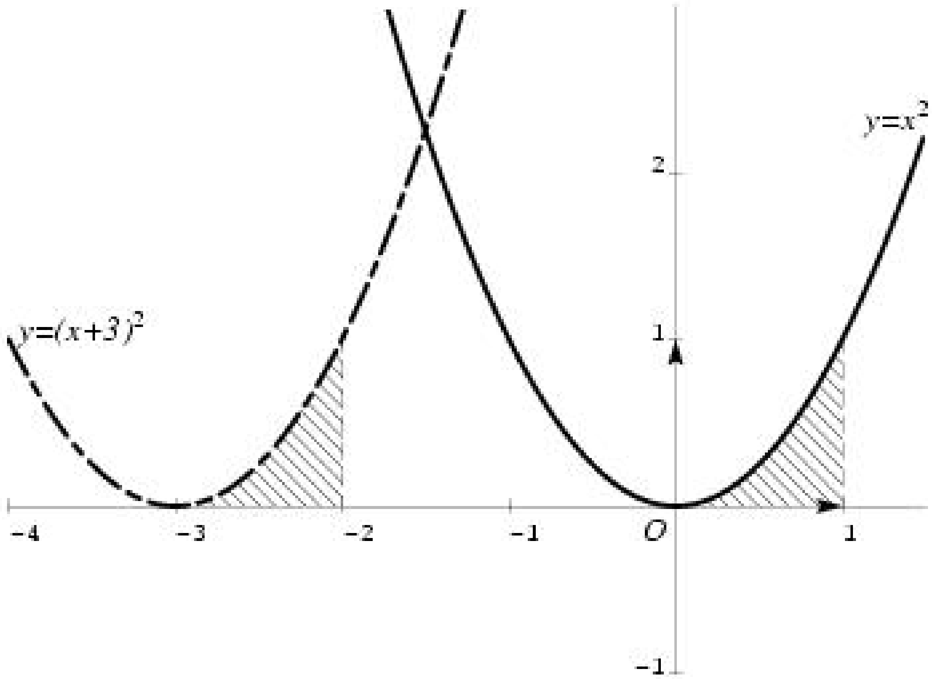
10 Intégration par changement de variable

10.1 Changement de variable du type $x \mapsto x + \beta$

10.1.1 Exemple

On se propose de calculer l'intégrale $I = \int_{-3}^{-2} (x+3)^2\,dx$.

On peut faire le calcul directement en remarquant que $\frac{1}{3}(x+3)^3$ est une primitive de $(x+3)^2$ sur $[-3, -2]$.



On peut également remarquer que, graphiquement, I représente une mesure de l'aire comprise entre l'axe $0x$ et la courbe C_1 d'équation $y = (x+3)^2$ sur l'intervalle $[-3, -2]$. Or cette aire est la même que celle qui est comprise entre l'axe Ox et la courbe C_2 d'équation $y = x^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$. (C_2 est déduite de C_1 par une translation de vecteur $3\vec{\imath}$.) On en déduit que

$$I = \int_{-3}^{-2} (x+3)^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

En fait, cet exemple se généralise en un théorème.

10.1.2 Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I du type $I = [a, b+\beta]$ où a, b et $\beta \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Alors

$$\int_a^b f(x+\beta)\,dx = \int_{a+\beta}^{b+\beta} f(x)\,dx$$

10.2 Changement de variable du type $x \mapsto \alpha x$ lorsque $\alpha \neq 0$

En tenant un raisonnement du même type, mais avec une multiplication de l'échelle sur l'axe des ordonnées, on montre le

10.2.1 Théorème

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\alpha a, \alpha b$, où $\alpha \neq 0$. Alors

$$\int_a^b f(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a}^{\alpha b} f(x)\,dx$$

10.2.2 Exemple

On se propose de calculer $I = \displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx$.

On a $I = \displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^x\,dx = [e^x]_0^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

10.3 Cas général : changement de variable du type $x \mapsto \varphi(x)$

10.3.1 Théorème (formule du changement de variable)

Soit Ψ une fonction numérique dérivable sur un intervalle $I = [a, b]$ dont la dérivée est continue sur I. Pour toute fonction f définie et continue sur l'intervalle $f(I)$, on a la formule, dite du « *changement de variable* » :

$$\int_{\Psi(a)}^{\Psi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f\left[\Psi(t)\right]\Psi'(t)\,dt.$$

Appliquer cette formule revient à changer la variable d'intégration. C'est cette formule qui a conduit à l'utilisation du symbole (plûtot compliqué) $\int_a^b f(x)\,dx$ *pour désigner l'intégrale par rapport à la variable x de la fonction f sur l'intervalle* $[a, b]$.

10.3.2 Exemple

Calculer l'intégrale $\int_1^4 \frac{dt}{1+\sqrt{t}}$ *en utilisant le changement de variable* $\varphi : t \mapsto \sqrt{t}$.
En fait ici, par rapport à la formule précitée, φ désigne la fonction Ψ^{-1}, réciproque sur l'intervalle considéré de la fonction $\Psi : x \mapsto x^2$.

1. *On calcule les nouvelles bornes d'intégration. On pose $x = \sqrt{t}$. La fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{t}$ est continue et strictement croissante sur $[1, 4]$, avec*
$$\varphi(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi(4) = 2$$
donc, lorsque t varie entre 1 et 4, x varie entre 1 et 2.
2. *On exprime l'expression à intégrer par rapport à la nouvelle variable. On a*
$$\frac{1}{1+\sqrt{t}} = \frac{1}{1+x} \qquad \text{car} \quad \sqrt{t} = x.$$
La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue, donc intégrable, sur $[1, 2]$.
3. *On exprime l'élément différentiel en fonction de la nouvelle variable et de son élément différentiel. On a $x = \varphi(t)$ et $\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. En utilisant les notations différentielles, on a donc*
$$dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \qquad \text{d'où} \qquad dt = 2\sqrt{t}\,dx = 2x\,dx \qquad \text{car} \quad \sqrt{t} = x.$$
4. *Il vient alors*
$$\int_1^4 \frac{dt}{1+\sqrt{t}} = \int_1^2 \frac{1}{1+x} \times 2x\,dx = \int_1^2 \frac{2x}{1+x}\,dx$$
(On a utilisé la formule du changement de variable avec $\Psi = \varphi^{-1} : t \mapsto t^2$.) Reste alors à remarquer que, pour tout élément x de $[1, 2]$, on a $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ pour obtenir
$$2\int_1^2 \frac{x}{1+x}\,dx = 2\int_1^2 dx - 2\int_1^2 \frac{dx}{1+x} = 2[x]_1^2 - 2[\ln(1+x)]_1^2 = 2(1 + \ln 2 - \ln 3).$$