Exercices

1. Calculs de base

Exercice 1 : Premiers calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^2 2\,dx$

b) $\int_1^2 3x\,dx$

c) $\int_1^3 (x-3)\,dx$

d) $\int_0^1 x^2\,dx$

e) $\int_1^2 x^2\,dx$

f) $\int_1^2 (x^2+3x+1)\,dx$

g) $\int_0^1 4t(t^2+1)\,dt$

h) $\int_0^1 5t(t^2+1)\,dt$

i) $\int_1^2 (x+1)(x^2+2x+3)\,dx$

Exercice 2 : Quelques intégrales simples

Calculer chacune des intégrales suivantes :

a) $\int_0^3 x^2+1\,dx$

b) $\int_3^4 x^2-3x\,dx$

c) $\int_{-5}^{-1} \frac{dx}{x^2}$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$

Exercice 3 : Quelques intégrales un peu plus « techniques »

a) $\int_1^2 (5x^4-3x^2+4)\,dx.$

b) $\int_1^2 (x-1)\left(\frac{x^2}{2}-x+3\right)\,dx.$

c) $\int_0^1 (2x+1)^3\,dx.$

d) $\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx.$

e) $\int_{-2}^1 \left(\frac{14}{(4-x)^3}-\frac{3}{(4-x)^2}\right)\,dx.$

f) $\int_{-2}^1 \sqrt{x+3}\,dx.$

Exercice 4 : Recherche de primitives

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^4+5x^3+3x^2-2$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x)=(x+1)^3$

d) $f(x)=(2x+3)^4$

e) $f(x)=x(x^2+1)^3$

f) $f(x)=(x^2+\frac{1}{3})(x^3+x)^4$

g) $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x-2)^2}$

h) $f(x)=\frac{4x^2}{(x^3+8)^3}$

i) $f(x)=x-\frac{1}{(3x+1)^2}$

j) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+1$

k) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

l) $f(x)=\frac{2}{1-x}$

m) $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$

n) $f(x)=\frac{2x+5}{x^2+5x-6}$

2. Fonctions trigonométriques

Exercice 5 : Quelques intégrales de fonctions trigonométriques

Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^3 x \, dx.$ b) $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx.$ c) $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx.$

Exercice 6 : Utilisation du logarithme pour l'intégration

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $B = \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} \, dx.$

1. Calculer la dérivée de la fonction numérique f défini sur l'intervalle $[\pi/2; 3\pi/4]$ par

$$f(x) = \ln(\sin x - \cos x)$$

où ln désigne le logarithme népérien. (On admettra que f est bien défini sur cet intervalle.)

2. On pose :

$$A = \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} \, dx, \quad \text{et} \quad B = \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} \, dx.$$

   a) Calculer $B - A$ et $B + A$.

   b) En déduire la valeur de A et celle de B.

3. Des fractions

Exercice 7 : Pôles simples dans $\mathbb{R}$

On se propose de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{3t - 14}{t^2 - t - 6} \, dt.$$

1. *a*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $t^2 - t - 6 = 0$.

   b) En déduire une factorisation de $t^2 - t - 6$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du premier degré.

2. Déterminer deux constantes a et b telles que, pour tout réel $t \in [0, 1]$, on ait

$$\frac{3t - 14}{t^2 - t - 6} = \frac{a}{t + 2} + \frac{b}{t - 3}.$$

3. Après avoir justifié que la fonction $t \mapsto \frac{3t - 14}{t^2 - t - 6}$ est continue sur $[0, 1]$, calculer la valeur exacte de l'intégrale I.

> **Remarque** – Les nombres -2 et 3 annulant le dénominateur sont appelés **pôles** de la fraction rationnelle. Ils sont dits **simples** car la factorisation du dénominateur où ils interviennent ne comporte que des polynômes du premier degré.
> Observez la forme de la décomposition de la fraction rationnelle dans le **2.**, c'est elle qui permet l'intégration de la fraction. Cette forme n'est pas nécessairement donnée dans les énoncés de BTS.

Exercice 8 : Partie entière d'une fraction rationnelle

On se propose de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{2x^2 + x + 1}{x + 3} f dx.$$

1. Déterminer trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\frac{2x^2 + x + 1}{x + 3} = ax + b + \frac{c}{x + 3}.$$

2. Après avoir justifié que la fonction $t \mapsto \frac{2x^2 + x + 1}{x + 3}$ est continue sur $[0, 1]$, calculer la valeur exacte de l'intégrale J.

> **Remarque** – Ici, le numérateur de la fraction rationnelle à intégrer possède un degré supérieur à celui du dénominateur, d'où la présence d'un polynôme $ax + b$ dans la décomposition du **1.** : c'est la **partie entière** de la fraction rationnelle. Ici cette fraction n'a qu'un seul pôle : -3, et il est simple.

Exercice 9 : Pôle double dans $\mathbb{R}$

On se propose de calculer l'intégrale
$$K = \int_0^1 \frac{2x+5}{(x+1)^2}\,dx.$$

1. Déterminer deux constantes réelles a et b telles que l'on ait, pour tout $x \in [0, 1]$,
$$\frac{2x+5}{(x+1)^2} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$
2. En déduire le calcul de la valeur exacte de l'intégrale K.

Exercice 10 : Un pôle simple et un pôle double

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x défini sur $]1, +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{-3x^2+16x+22}{(2x+5)(x-1)^2}.$$

1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x \in]1, +\infty[$,
$$\frac{-3x^2+16x+22}{(2x+5)(x-1)^2} = \frac{a}{2x+5} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$
2. En déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.
3. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$.

Exercice 11 : Fonction rationnelle et logarithme

On considère les fonctions f et g définie sur l'intervalle $]-2, 2[$ par
$$f(x) = \frac{x^2}{4-x^2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(4-x^2).$$

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0, 1]$:
$$f(x) = -1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}.$$
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale
$$I = \int_0^1 f(x)\,dx.$$
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que
$$J = \int_0^1 g(x)\,dx = \ln 3 + 2I.$$
En déduire la valeur exacte de J.

4. Des inégalités

Exercice 12 : Obtention de développements limités par intégrations d'inégalités

On se propose ici d'encadrer les fonctions sinus et cosinus par des fonctions polynômes. On procédera par des intégrations successives d'inégalités

1. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a l'inégalité $-x \leqslant \sin x \leqslant x$.
2. Montrer successivement que pour tout $x \geqslant 0$,
   a) $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1.$
   b) $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x.$
   c) $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}.$
   d) $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}.$
3. *a*) Montrer que les inégalités *a*) et *c*) restent vraies lorsque x est négatif.
   b) Quels encadrements de $\sin x$ peut-on déduire des questions précédentes lorsque x est négatif ?

5. Des intégrations par parties

Exercice 13 : Intégration par parties

Calculer les deux intégrales suivantes

a) $I = \int_1^2 x \ln x \, dx$ b) $F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$

Vérifie que F est bien la primitive de ln qui s'annule en 1.

Exercice 14 : Facile . . .

Calculer les intégrales suivantes (utiliser une intégration par parties) :

1. a) $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$, **2.** a) $\int_1^2 (x+1) \ln x \, dx$, **3.** a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx$.

Exercice 15 : Aussi facile . . .

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties :

1. a) $\int_{-1}^0 xe^x \, dx$, **2.** a) $\int_{-1}^0 (x+2)e^x \, dx$, **3.** a) $\int_{-1}^0 (x+2)e^{x+1} \, dx$.

Exercice 16 : Une intégrale un peu problématique

Le but de cet exercice est de calculer la valeur exacte de l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^3} \, dx$.

1. a) Montrer que pour tout réel x on a

$$\frac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$

b) Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)^2} \, dx.$$

2. a) Déterminer une primitive de la fonction

$$x \mapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^3}.$$

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^3} \, dx.$$

Exercice 17 : Intégrations successives

Calculer les intégrales suivantes en utilisant deux intégrations par parties successives :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$, **2.** $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$, **3.** $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$.

Exercice 18 : Intégration par parties

Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$I = \int_0^3 (2+x)e^{-x} \, dx.$$

On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 19 : Intégration par parties : produit d'une exponentielle et d'un logarithme

1. *a*) Montrer que l'on a pour tout nombre réel x

$$\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}.$$

b) En déduire le calcul de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx.$

2. Soit f la fonction défini pour tout nombre réel x par

$$f(x) = \ln(1+e^x).$$

a) Calculer la dérivée de la fonction f.

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'intégrale

$$J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x)\,dx.$$

Exercice 20 :

Calculer $J = \int_2^3 (x-2)e^{x-2}\,dx$ et montrer que $J = 1$. (Il pourra être nécessaire de procéder à une intégration par parties)

Exercice 21 :

Calculer $K = \int_0^{\frac{1}{5}} 10xe^{-5x}\,dx$ et montrer que $K = 1$. (Il pourra être nécessaire de procéder à une intégration par parties)

6. Valeur approchée d'intégrale

Exercice 22 : Calcul de valeurs approchées d'une intégrale

On considère la fonction f défini sur $]-1,4[$. et l'intégrale J, définie respectivement par

$$f(x) = 2\ln\frac{4(x+1)}{4-x} \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^2 f(x)\,dx.$$

Le but de ce problème est de calculer l'intégrale J (partie A), puis de calculer des valeurs approchées de J en remplaçant f par des fonctions plus faciles à intégrer (parties B et C). Dans chacun des cas, on évaluera l'erreur relative.

A - Calcul de la valeur exacte de J**.**

1. *a*) Montrer que l'on a pour tout nombre x de l'intervalle $]-1,4[$

$$f(x) = 2\ln(x+1) - 2\ln(4-x) + 4\ln 2.$$

b) Déterminer les limites de f en -1 et en 4.

c) Étudier les variations de f.

2. Tracer C_f, la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal d'unités 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

3. *a*) On introduit la fonction auxiliaire F défini pour tout $x > 0$ par

$$F(x) = \int_1^x 2\ln t\,dt.$$

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $F(x) = 2(1 - x + x\ln x)$.

b) On considère sur l'intervalle $]-1,4[$ les fonctions h et H définie par

$$h(x) = 2\ln(x+1) - 2\ln(4-x) \qquad \text{et} \qquad H(x) = F(x+1) + F(4-x).$$

Montrer que H est une primitive de h sur $]-1,4[$.

c) Calculer la valeur exacte de J.

B - Utilisation d'un polynôme d'interpolation de degré 2.

Soit P le polynôme défin par $P(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels.

1. Déterminer a, b et c pour que $P(0) = f(0)$, $P(1) = f(1)$ et $P(2) = f(2)$.

2. On prend désormais

$$P(x) = (-5\ln 2 + 3\ln 3)x^2 + (11\ln 2 - 5\ln 3)x.$$

Calculer $I = \int_0^2 P(x)\,dx$.

3. Calculer $|J - I|$. Donner, à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-3} près du quotient

$$\frac{|J - I|}{J}.$$

C - Utilisation d'un polynôme d'interpolation de degré 1.

1. On note T la tangente à C_f au point d'abscisse $3/2$. Déterminer une équation de T sous la forme $y = t(x)$ et placer T sur la figure

2. On pose $g(x) = f(x) - \frac{8}{5}x + \frac{12}{5} - 4\ln 2$, pour $x \in]-1, 4[$.

a) Étudier le signe de la dérivée de g.

b) Étudier le signe de g. Interpréter géométriquement.

c) Calculer

$$K = \int_0^2 t(x)\,dx.$$

Donner une interprétation géométrique de la valeur de $|J - K|$.

d) Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur décimale approchée à 10^{-3} près du quotient $\frac{|J - K|}{J}$.

7. Intégrations par changement de variable

Exercice 23 : Changement de variable $x \mapsto x + \beta$

À l'aide du changement de variable $t = x + 1/2$, calculer la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\frac{5}{4} + x + x^2}.$$

Donner une valeur approchée de I à 10^{-3} près.

Exercice 24 : Changement de variable $x \mapsto \alpha x + \beta$

On considère l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1}\,dx.$$

1. Calculer l'intégrale I à l'aide du changement de variable

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x + 1).$$

2. Donner une valeur approchée de I à 10^{-3} près.

Exercice 25 : Changement de variable et intégration par parties

On considère la fonction f défini sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$$

1. *a*) Déterminer les nombres réels A et B tels que pour tout nombre réel t strictement positif, on ait

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}.$$

b) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t(1+t)}$.

2. Soit l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

a) En utilisant le changement de variable défin par $t = e^x$, montrer que

$$J = \int_1^e \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt.$$

b) Calculer alors J en utilisant une intégration par parties et le résultat de la question **1.***b*).

Exercice 26 : Changement de variable $x \mapsto \alpha x$

Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-2}^{2} \frac{dt}{t^2+4}$$

en utilisant le changement de variable défin par $x = \dfrac{t}{2}$