# Variables aléatoires

## Table des matières



## 1 Variable aléatoire

On considère une expérience aléatoire et on note $\Omega$ l'univers de cette expérience.

**Définition.** On appelle *variable aléatoire* toute fonction $X$ de $\Omega$ vers $\mathbb{R}$.

**Remarque.** En termes plus concrets (mais en faisant des abus de language), on peut considérer qu'une variable aléatoire $X$ est une variable dont le contenu dépend du résultat d'une expérience aléatoire donnée.

**Définition.** On appelle *image de* $\Omega$ *par* $X$, et on note $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs réelles pouvant être prises par $X$. Si l'image de $\Omega$ par $X$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles, on dit que la variable $X$ est *continue*. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est *discrète*.

**Exemples**

- On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un individu français au hasard, et à comptabiliser le nombre $X$ de minutes qu'il a passé devant la télévision la semaine précédente. Ici, l'univers des possibles est constitué de tous les individus français, et la variable aléatoire $X$ est continue. L'image de $\Omega$ par $X$ est l'intervalle $[0, 7 \times 24 \times 60]$
- On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 faces et à observer le nombre $X$ sur la face supérieure du dé. Ici, l'ensemble $\Omega$ contient 6 événements élémentaires, et l'image de $\Omega$ par $X$ est l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La variable aléatoire $X$ ainsi définie est discrète.
- Soit $X$ la variable aléatoire mesurant le nombre de lancers nécessaires, au jeu de Pile ou Face, pour obtenir Face pour la première fois, en supposant qu'à chaque lancer, Pile et Face sont équiprobables. Alors $X$ peut prendre n'importe quelle valeur entiére positive. L'événement $(X = k)$ correspond à : « obtenir Pile à chacun des $(k-1)$ premiers lancers, et Face au $k$-ième lancer ». Dans ce cas, la variable $X$ peut prendre une infinité de valeurs différentes. On dit que $X$ est *discrète* et *dénombrable*.

## 2 Somme de deux variables aléatoires

### 2.1 Indépendance de deux variables aléatoires

Soit $X$ une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Soit $Y$ une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$.
Alors les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes si, pour tout $i$ et $j$ vérifiant $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a

$$p(X = \alpha_i \quad \text{et} \quad Y = \beta_j) = p(X = \alpha_i) \times p(Y = \beta_j)$$

### 2.2 Espérance mathématique d'une somme de variables aléatoires

On admet que si $X$ ey $Y$ sont deux variables aléatoires d'espérances respectives $E(X)$ et $E(Y)$, alors

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

De la même façon, on aura $E(X - Y) = aE(X) - E(Y)$.

## 2.3 Variance de la somme de variables aléatoires indépendantes

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires **indépendantes**, alors

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

## 2.4 Somme de variables aléatoires suivant des lois usuelles

### 2.4.1 Lois normales

Si $X_1$ et $X_2$ sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant les lois normales respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors la variable $X_1 + X_2$ suit la loi normale de moyenne $m_1 + m_2$ et d'écart-type $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

### 2.4.2 Lois de Poisson

Si $X_1$ et $X_2$ sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant les lois de Poisson respectives $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

# 3 Loi de probabilité – Fonction de répartition

On considère une expérience aléatoire donnée, et une variable aléatoire $X$ associée à cette expérience. On note $\Omega$ l'univers de cette expérience.

## 3.1 Cas d'une variable $X$ discrète

**Définition.** On appelle *loi de probabilité de $X$*, ou encore *distribution* de $X$, la fonction définie de $X(\Omega)$ vers $[0, 1]$ par

$$f(k) = p(X = k) \qquad \text{où } p(X = k) \text{ désigne la probabilité que } X \text{ soit égale au réel } k.$$

**Définition.** La *fonction de répartition* de la variable aléatoire $X$ est la fonction $F$, définie de $\mathbb{R}$ vers $[0, 1]$ par

$$F(x) = p(X \leq x)$$

On remarque que la fonction de répartition $F$ est croissante (au sens large) sur $\mathbb{R}$.

**Remarque.** Dans le cadre des lois discrètes on se contente souvent de donner les $p(X = k)$.

## 3.2 Cas d'une variable $X$ continue

**Définition.** On appelle *densité de probabilité de $X$*, la fonction définie de $X(\Omega)$ vers $[0, 1]$ par

$$f(k) = p(X = k) \qquad \text{où } p(X = k) \text{ désigne la probabilité que } X \text{ soit égale au réel } k.$$

La variable aléatoire $X$ étant continue, cette fonction $f$ sera également continue.

**Définition.** Admettons que, par exemple, $X$ ne prenne pas de valeur négative. Autrement dit, si $X(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Alors la *fonction de répartition* de la variable aléatoire $X$ est la fonction $F$, définie de $R$ vers $[0, 1]$ par

$$F(x) = \int_0^x (f(t))\, dt.$$

Si $X$ prend des valeurs négatives, on adapte cette définition.
On remarque que là encore, la fonction de répartition $F$ est croissante (au sens large) sur $\mathbb{R}$.

**Théorème.** On a alors la propriété remarquable suivante, pour tous $a$ et $b$ tels que $b \geq a \geq 0$ :

$$p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt$$

# 4 Espérance, variance, écart-type d'une variable aléatoire

- Si $X$ est une variable aléatoire **discrète** prenant $n$ valeurs $x_i$, avec les probabilités $P(X = x_i) = p_i$ (où $1 \leq i \leq n$), alors l'*espérance mathématique*, notée $E(X)$, de la variable aléatoire $X$ est le nombre défini par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

- Si $X$ est une variable aléatoire **continue**, alors l'*espérance mathématique*, notée $E(X)$, de la variable aléatoire $X$ est le nombre défini par
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$
où $f$ est la densité de probabilité de la variable $X$.
- Dans tous les cas, la *variance* d'une variable aléatoire $X$ est, si elle existe, l'espérance mathématique de la variable aléatoire $(X - E(X))^2$. On la note $V(X)$. On définit alors l'*écart-type* de la variable aléatoire $X$, noté $\sigma(X)$, par
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$
On a alors la propriété
$$V(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2$$
qui implique en particulier, pour tout réel $a$ et $b$,
$$V(aX + b) = a^2V(X)$$