Table des matières

Probabilités simples

Variables aléatoires

Les lois de probabilités classiques

Exercices

Variables aléatoires

Les lois de probabilités classiques

Probabilités simples

1. Introduction : lien fréquence $\leftrightarrow$ probabilité

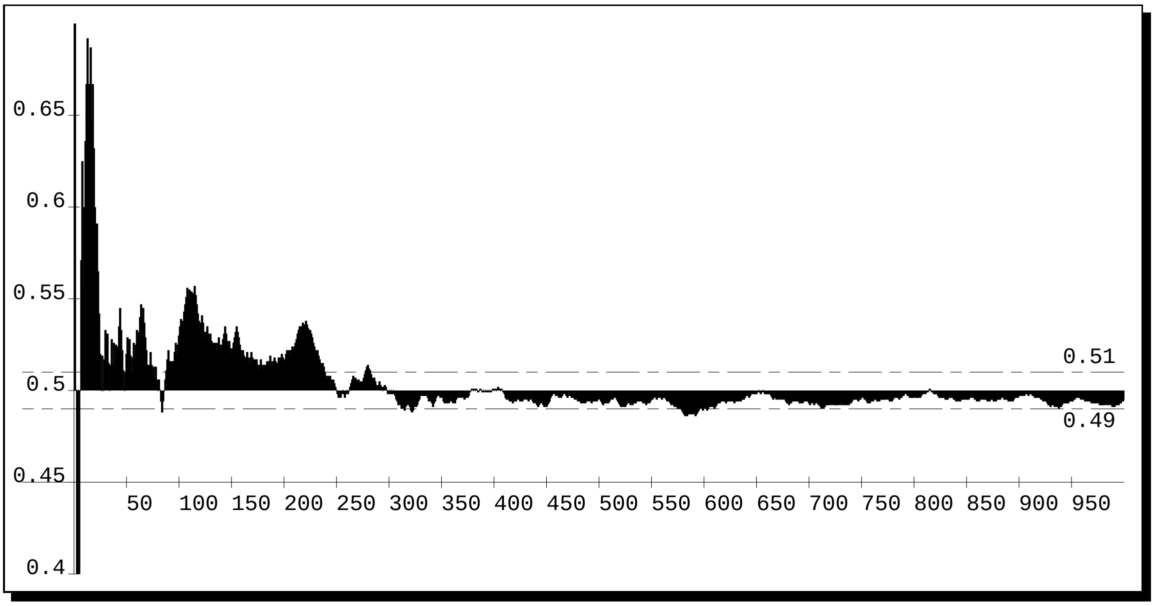
Il a fallu longtemps pour arriver à une définitio satisfaisante de la probabilité. Celle en vigueur actuellement a été publiée en 1933 et est due au russe Kolmogorov. Cette définitio explicite le lien entre la fréquence d'un événement et sa probabilité. Elle s'exprime de façon tout à fait rigoureuse (bien sûr), et en français vulgarisé elle dit à peu près ceci :

Plus le nombre d'expérience augmente, et plus il est **probable** *que la fréquence de l'événement A sera proche de la probabilité de A.*

Par exemple, au jeu de *Pile ou Face*, la probabilité de l'événement « *obtenir un Pile* » est $1/2$. Cela signifi que plus le nombre de parties augmente, et plus il est probable que la fréquence d'apparition du *Pile* soit proche de $1/2$.

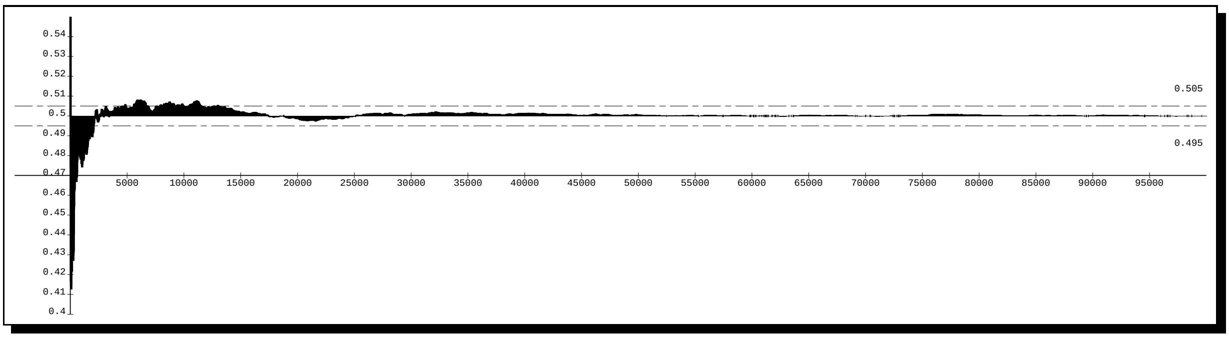
Dans la pratique, on obtient des schémas où l'on observe une certaine « stabilisation de la fréquence » avec l'augmentation du nombre d'expériences.

Par exemple, en voici un issu d'une simulation de 1 000 parties successives.



Simulation du jeu de Pile ou Face sur 1 000 parties
évolution de la fréquence d'apparition du Pile

Sur 100 000 parties, on obtient un graphique de ce type (noter le facteur d'agrandissement par rapport au graphique précédent) :



Simulation du jeu de Pile ou Face sur 100 000 parties
évolution de la fréquence d'apparition du Pile

Cette définitio est évidemment inexploitable telle quelle à notre niveau, bien qu'il soit possible (et donc *probable*), que nous la retrouvions plus tard dans l'année scolaire. Sous sa forme rigoureuse, elle est appelée *loi faible des grands nombres.*

2. Une définition pratique : le modèle d'urne

Dans la plupart des calculs pratiques, le plus simple consiste à ramener l'exemple étudié à la situation de référence : l'unique tirage dans une urne. On utilise ensuite la définitio suivante du mot *probabilité* :

Définition : *probabilité d'un événement*

On considère une urne opaque contenant k boules blanches et q boules noires ($k, q \in \mathbb{N}$), dans laquelle on procède à un tirage aléatoire d'une seule boule. On fait l'hypothèse que chacune des boules a la même probabilité d'être choisie.

Alors la *probabilité* de l'événement « *choisir une boule blanche* »est

$$p = \frac{k}{k+q}$$

■

Dans la pratique, cela revient à effectuer une *modélisation* de la situation par un tirage dans une urne, ramenant le problème à un simple calcul de dénombrement.

Néammoins, si l'on préfère, on peut utiliser l'ensemble des formules qui suivent.

3. Définitions et propriétés élémentaires

3.1 - Vocabulaire

On considère une expérience *aléatoire* (c'est à dire dont le résultat dépend du hasard). L'ensemble de toutes les issues de cette expérience est appelé *univers des possibles*; on le note souvent Ω.

On appelle *événement* toute partie de l'univers des possibles, un événement réduit à une seule issue étant appelé *événement élémentaire*. Le tableau qui suit résume les définition et notations usuelles relatives à la notion d'événement :

langage ensembliste	langage des probabilités	notation
A est une partie de Ω	A est un événement	$A \subset \Omega$
A est vide	l'événement A est impossible	$A = \emptyset$
A est égal à Ω	l'événement A est certain	$A = \Omega$
C est la *réunion* de A et B	C est l'événement (A ou B)	$C = A \cup B$
C est l'*intersection* de A et B	C est l'événement (A et B)	$C = A \cap B$
A et B sont *disjoints*	A et B sont *incompatibles*	$A \cap B = \emptyset$
A et B sont *complémentaires*	A et B sont des événements *contraires*	$A = \overline{B} = \complement B$

3.2 - Situation d'équiprobabilité

Lorsque toutes les issues ont la même probabilité d'apparaître, on dit que l'on est dans une *situation d'équiprobabilité*. Dans ce cas, si $\operatorname{Card}\Omega = n$, la probabilité de chacun des événements élémentaire de Ω est $1/n$. En découle le fait que si l'événement A est composé de p événements élémentaires, alors la probabilité de A est $p(A) = p/n$, formule que l'on se rappelle souvent sous la forme

$$\boxed{p(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card}\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

En fait, la majeure partie des problèmes de Bts se situent sous l'hypothèse d'équiprobabilité (ou alors on s'y ramène, au moins en pensée, par exemple en numérotant les boules lors d'un tirage dans une urne), et l'une des premières choses à faire lors d'un exercice (après avoir lu son texte et traduit les hypothèses), consiste à dénombrer le cardinal de l'univers des possibles.

3.3 - Les premiers théorèmes

Ils sont au nombre de trois et sont valables y compris dans les cas de non-équiprobabilité.

1. Si A et B sont des événements **incompatibles**, (i.e. si $A \cap B = \emptyset$) alors

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

2. Quel que soit l'événement A, la probabilité de l'événement contraire $\overline{A}$ est donnée par

$$\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A).}$$

3. Quels que soient les événements A et B, on a

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).}$$

4. Dénombrements

4.1 - Ensemble des n-uplets d'un ensemble

On considère un ensemble E et un entier $n \in \mathbb{N}$. On appelle *n-uplet* (ou *n-liste*) de E toute liste **ordonnée** de n éléments de E.

Exemple :

Si E est l'ensemble à 3 éléments $E = \{1, 2, 3\}$, alors $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ et $(3, 2, 1)$ par exemple, sont des *triplets*, ou 3-listes, de l'ensemble E. Et $(2, 2)$ est un *couplet*, ou 2-liste, de E. ∎

On note E^n, ou $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}$, l'ensemble des n-listes de E.

Exemples :

• Si E est l'ensemble à 2 éléments $E = \{a, b\}$, alors E^3 est l'ensemble

$$E^2 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (b, b)\}.$$

et E^3 est l'ensemble

$$E^3 = \{(a, a, a); (a, a, b); (a, b, a); (a, b, b); (b, a, a); (b, a, b); (b, b, a); (b, b, b)\}.$$

• La notation $\mathbb{R}^2$ désigne l'ensemble des couples (x, y) où x et y sont des éléments de $\mathbb{R}$. ∎

On appelle *cardinal* de l'ensemble E, et on note $\mathrm{Card}\,E$, le nombre d'éléments de l'ensemble E.

Soit p un entier positif non nul et E un ensemble de cardinal $\mathrm{Card}\,E = n$. Alors $\boxed{\mathrm{Card}(E^p) = n^p}$.

4.2 - Arrangements d'un ensemble – Permutations

Soit E un ensemble. On appelle *arrangement de p éléments de E* un p-uplet de E dont **tous les éléments sont distincts**.

Si E est un ensemble fin de cardinal $n \in \mathbb{N}$, alors il n'y a qu'un nombre fin d'arrangements de p éléments de E. On note A_n^p ce nombre, et on a la propriété :

$$\boxed{A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}} \qquad \text{avec la convention} \qquad \boxed{A_n^0 = 1}.$$

Soit E un ensemble fin de cardinal $n \in \mathbb{N}$. On appelle *permutation de E* tout arrangement de n éléments de E. On appelle *factorielle n*, et on note $n!$, le nombre de permutations de cet ensemble E. On a donc pour tout entier n

$$\boxed{n! = A_n^n = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1}_{n \text{ facteurs}}} \qquad \text{avec la convention} \qquad \boxed{0! = 1}.$$

On aura ainsi

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad \text{etc}\ldots$$

Avec cette nouvelle notation , on peut écrire le nombre A_n^p sous la forme suivante :

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

4.3 - Combinaisons d'un ensemble

Soit E un ensemble et p un entier. On appelle *combinaison d'ordre p de E* tout sous-ensemble de E de cardinal p. On peut également considérer cette combinaison comme une liste **non ordonnée** de p éléments **distincts** de E.

Exemple

Si E désigne l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, alors les triplets $(1, 2, 3)$ et $(1, 3, 2)$ représentent 2 arrangements distincts, 2 permutations distinctes, mais une seule combinaison (que l'on note parfois entre accolade $\{1, 2, 3\}$ pour bien rappeler que c'est un sous-ensemble de E que l'on considère). ∎

Si E est un ensemble fin de cardinal $n \in \mathbb{N}$, alors il n'y a qu'un nombre fin de combinaisons d'ordre p de E. On note C_n^p ce nombre, et on a la propriété :

$$\boxed{C_n^p = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}} \qquad \text{avec la convention} \qquad \boxed{C_n^0 = 1}.$$

En d'autres termes, C_n^p représente le nombre de parties à p éléments que l'on peut faire à partir d'un ensemble à n éléments.

4.4 - Triangle de Pascal – Formule du binôme de Newton

On a les propriétés suivantes, que l'admettra :

Propriétés

- pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{C_n^0 = 1}$, $\boxed{C_n^n = 1}$, $\boxed{C_n^1 = 1}$.
- pour tous entiers $n, p \in \mathbb{N}^*$, avec $0 \leqslant p \leqslant n$, $\boxed{C_n^{n-p} = C_n^p}$
- pour tous entiers $n, p \in \mathbb{N}^*$, avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $\boxed{C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p}$

∎

Graphiquement, le calcul des C_n^p successifs donne ce que l'on appelle *le triangle de Pascal* :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$	1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	1

Ainsi $C_5^2 = 10$ par exemple.

On retrouve les C_n^p dans d'autres branches des mathématiques; on a ainsi, en algèbre, la formule dite du *binôme de Newton*, qui sert à développer une expression du type $(a + b)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Cette formule dit que si a et b sont deux réels quelconques et n un entier quelconque, alors

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}}$$

autrement dit :

$$(a+b)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^n a^n$$

Appliqué à $n = 4$, la formule du binôme donne :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

5. Résumé, applications aux calculs de probabilités

5.1 - Arrangements et combinaisons

Un *p-arrangement* est une liste ordonnée de p éléments distincts. Le nombre $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$ est égal au nombre de p-arrangements distincts qu'il est possible de faire avec n éléments distincts.

Une *p-combinaison* est une liste non ordonnée de p éléments distincts. On peu également la considérer comme un ensemble à p éléments. Le nombre $C_n^p = A_n^p/p!$ est égal au nombre de p-combinaisons distinctes qu'il est possible de faire avec n éléments distincts. À noter que ce nombre est également le nombre de sous-ensembles de cardinal p que l'on peut constituer à partir d'un ensemble de cardinal n.

5.2 - Situations de référence

Ce sont les tirages dans une urne, la plupart des exercices pouvant se ramener à l'une des trois situations ci-dessous.

Dans tout ce paragraphe, on suppose que l'urne que l'on considère contient n boules ayant toutes la même probabilité de sortie.

5.2.1 - Tirages avec remise

Si l'on effectue p tirages successifs avec remise, il y a n^p issues différentes possibles.

5.2.2 - Tirages sans remise

Si l'on effectue p tirages successifs sans remise, il y a A_n^p issues différentes possibles si l'on tient compte de l'ordre de sortie, et C_n^p issues différentes possibles si l'on ne tient pas compte de cet ordre.

5.2.3 - Tirages simultanés

On se ramène au cas des tirages sans remise. On peut, au choix, considérer ou non que l'ordre a de l'importance, le tout étant de rester cohérent d'un bout à l'autre de l'exercice : si l'on dénombre l'univers des possibles en tenant compte de l'ordre, il faut tenir compte de l'ordre jusqu'à la fi de l'exercice ! Moyennant cette précaution élémentaire, les deux méthodes (ordre ou non) donneront les même résultats en termes de probabilité.

6. Probabilités conditionnelles, événements indépendants

On considère une expérience aléatoire donnée. Soient A et B deux événements, avec $p(B) \neq 0$ (autrement dit, l'événement B n'est pas impossible). On appelle *probablité de A sachant B*, et on note $p_B(A)$ ou $p(A|B)$ le nombre

$$\boxed{p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}.$$

On a donc en particulier, si $p(B) \neq 0$, les relations

$$\boxed{p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A) = p(A) \times p_A(B).}$$

Remarque – En raisonnant sur les cardinaux des ensembles plûtot que sur les probabilités, on a

$$\boxed{p_B(A) = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}(B)}}$$

On dit que les deux événements A et B sont *indépendants* si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ (ce qui revient à dire que $p_B(A) = p(A)$).

7. Partition d'un ensemble – Formule des probabilités totales

Soit Ω un ensemble et $B_1, B_2, \ldots, B_n$, des sous ensembles de Ω. On dit que la famille $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ est une *partition* de Ω lorsque les deux conditions suivantes sont vérif ées :

- les B_i sont disjoints deux à deux, (autrement di $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$),
- Ω est inclus dans la réunion des B_i (autrement dit $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$).

Par exemple, si B est un sous ensemble de Ω, alors $(B, \overline{B})$ est une partition de Ω.

Propriété *Formule des probabilités totales*

Dans une expérience aléatoire, on note Ω l'ensemble des résultats possibles (on parle aussi de l'*univers* associé à l'expérience).

Si la famille $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ forme une partition de Ω, alors on a, pour tout événement A de Ω :

$$\boxed{p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \cdots p(A \cap B_n)}$$

∎

En particulier, si B est un sous ensemble de Ω, alors

$$\boxed{p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})}$$

On en déduit alors, puisque $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ par définition que si B n'est ni certain ni impossible, alors

$$p(A) \times p_A(B) + p(A) \times p_A(\overline{B}) = p(A) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p_A(B) + p_A(\overline{B}) = 1}$$

Variables aléatoires

1. Variable aléatoire

On considère une expérience aléatoire (c'est à dire dont le résultat dépend du hasard). On note Ω l'univers de cette expérience (Ω est donc l'ensemble de tous les résultats possibles).

On appelle *variable aléatoire* toute fonction X de Ω vers $\mathbb{R}$.

> **Remarque** – En termes plus concrets (mais en faisant des abus de language), on peut considérer qu'une variable aléatoire X est une variable dont le contenu dépend du résultat d'une expérience aléatoire donnée.

On appelle *image de* Ω *par* X, et on note $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs réelles pouvant être prises par X.

Si l'image de Ω par X est un intervalle ou une réunion d'intervalles, on dit que la variable X est *continue*. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est *discrète*.

Exemples

• On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un individu français au hasard, et à comptabiliser le nombre X de minutes qu'il a passé devant la télévision la semaine précédente. Ici, l'univers des possibles est constitué de tous les individus français, et la variable aléatoire X est continue. L'image de Ω par X est l'intervalle $[0, 7 \times 24 \times 60]$

• On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 faces et à observer le nombre X sur la face supérieure du dé. Ici, l'ensemble Ω contient 6 événements élémentaires, et l'image de Ω par X est l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La variable aléatoire X ainsi défini est discrète.

• Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre de lancers nécessaires, au jeu de Pile ou Face, pour obtenir Face pour la première fois, en supposant qu'à chaque lancer, Pile et Face sont équiprobables. Alors X peut prendre n'importe quelle valeur entiére positive. L'événement $(X = k)$ correspond à : « obtenir Pile à chacun des $(k - 1)$ premiers lancers, et Face au k-ième lancer ». Dans ce cas, la variable X peut prendre une infini é de valeurs différentes. On dit que X est *discrète* et *dénombrable*. ■

2. Somme de deux variables aléatoires

2.1 - Indépendance de deux variables aléatoires

Soit X une variable aléatoire discrète prenant un nombre fin de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Soit Y une variable aléatoire discrète prenant un nombre fin de valeurs $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$.

Alors les variables X et Y sont indépendantes si, pour tout i et j vérifian $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a

$$\boxed{p(X = \alpha_i \quad \text{et} \quad Y = \beta_j) = p(X = \alpha_i) \times p(Y = \beta_j)}$$

2.2 - Espérance mathématique d'une somme de variables aléatoires

On admet que si X ey Y sont deux variables aléatoires d'espérances respectives $E(X)$ et $E(Y)$, alors

$$\boxed{E(X + Y) = E(X) + E(Y)}$$

De la même façon, on aura $E(X - Y) = aE(X) - E(Y)$.

2.3 - Variance de la somme de variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes**, alors

$$\boxed{V(X + Y) = V(X) + V(Y)}$$

2.4 - Somme de varables aléatoires suivant des lois usuelles

2.4.1 - Lois normales

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant les lois normales respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors la variable $X_1 + X_2$ suit la loi normale de moyenne $m_1 + m_2$ et d'écart-type $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

2.4.2 - Lois de Poisson

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant les lois de Poisson respectives $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

3. Loi de probabilité – Fonction de répartition

On considère une expérience aléatoire donnée, et une variable aléatoire X associée à cette expérience. On note Ω l'univers de cette expérience.

3.1 - Cas d'une variable X discrète

On appelle *loi de probabilité de* X, ou encore *distribution* de X, la fonction défini de $X(\Omega)$ vers $[0, 1]$ par

$\boxed{f(k) = p(X = k)}$ où $p(X = k)$ désigne la probabilité que X soit égale au réel k.

La *fonction de répartition* de la variable aléatoire X est la fonction F, défini de $\mathbb{R}$ vers $[0, 1]$ par

$$\boxed{F(x) = p(X \leqslant x)}$$

On remarque que la fonction de répartition F est croissante (au sens large) sur $\mathbb{R}$.

3.2 - Cas d'une variable X continue

On appelle *densité de probabilité de* X, la fonction défini de $X(\Omega)$ vers $[0, 1]$ par

$\boxed{f(k) = p(X = k)}$ où $p(X = k)$ désigne la probabilité que X soit égale au réel k.

La variable aléatoire X étant continue, cette fonction f sera également continue.

Admettons que, par exemple, X ne prenne pas de valeur négative. Autrement dit, si $X(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Alors la *fonction de répartition* de la variable aléatoire X est la fonction F, défini de $\mathbb{R}$ vers $[0, 1]$ par

$$\boxed{F(x) = \int_0^x (f(t))\, dt.}$$

(Si X prend des valeurs négatives, on adapte cette définitio par l'exemple.)

On remarque que là encore, la fonction de répartition F est croissante (au sens large) sur $\mathbb{R}$.

On a alors la propriété remarquable suivante, pour tous a et b tels que $b \geqslant a \geqslant 0$:

$$\boxed{p(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt}$$

4. Espérance, variance, écart-type d'une variable aléatoire

• Si X est une variable aléatoire **discrète** prenant n valeurs x_i, avec les probabilités $P(X = x_i) = p_i$ (où $1 \leqslant i \leqslant n$), alors l'*espérance mathématique*, notée $E(X)$, de la variable aléatoire X est le nombre défin par

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$

• Si X est une variable aléatoire **continue**, alors l'*espérance mathématique*, notée $E(X)$, de la variable aléatoire X est le nombre défin par

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx}$$

où f est la densité de probabilité de la variable X.

• Dans tous les cas, la *variance* d'une variable aléatoire X est, si elle existe, l'espérance mathématique de la variable aléatoire $(X - E(X))^2$. On la note $V(X)$. On défini alors l'*écart-type* de la variable aléatoire X, noté $\sigma(X)$, par

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

On a alors la propriété

$$\boxed{V(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2}$$

qui implique en particulier, pour tout réel a et b,

$$\boxed{V(aX + b) = a^2 V(X)}$$

Les lois de probabilités classiques

1. Loi binômiale (épreuves indépendantes répétées)

On considère une expérience aléatoire n'ayant que **deux issues possibles** : A et $\overline{A}$ (souvent appelés *succès* et *échec*), et on répète n fois de suite cette expérience, en faisant l'hypothèse que chaque expérience est **indépendante des précédentes** (cas du jeu de Pile ou Face par exemple). On dit que l'on est dans le cadre d'un *schéma de Bernouilli*.

On note p la probabilité de A et $q = 1 - p$ la probabilité de $\overline{A}$.

On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de fois où A est réalisé après les n expériences.

Alors la loi de probabilité de X, notée $\mathcal{B}(n, p)$, est appelée *loi binômiale de paramètres* n *et* p, et elle est caractérisée par

$$\boxed{p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}}$$

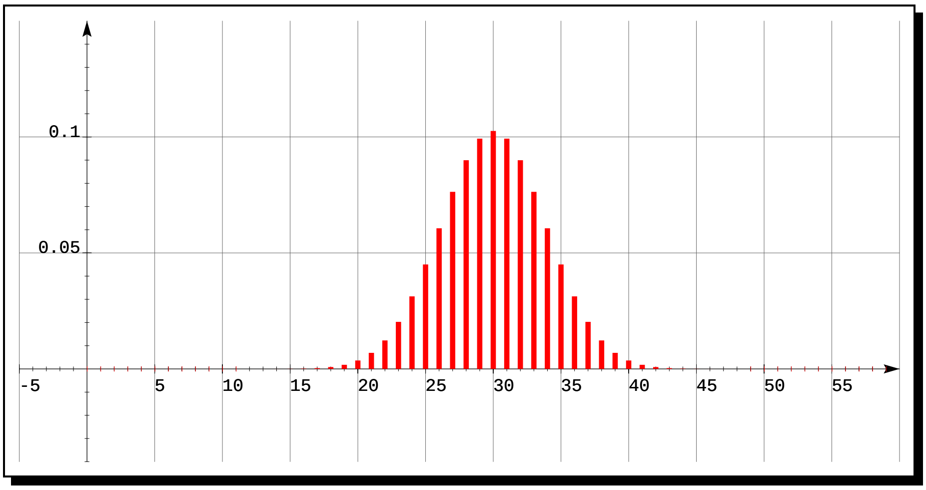
On montre alors que son espérance, sa variance et son écart-type vérifien

$$\boxed{E(X) = np} \qquad \boxed{V(X) = npq} \qquad \boxed{\sigma(X) = \sqrt{npq}}$$

Exemple : *Jeu de Pile ou Face*

On lance une pièce de monnaie 60 fois de suite, et on appelle X la variable aléatoire qui, à chaque série de 60 lancers, associe nombre de fois où est sorti le *Pile*.

Chaque lancer est indépendant des précédents, et il n'y a que 2 issues possibles (*Pile* ou non); la variable aléatoire X suit donc une loi binômiale. Comme la probabilité d'obtenir *Pile* est $1/2$, et qu'il y a 60 expériences, cette loi est la loi $\mathcal{B}(60; 1/2)$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



loi binômiale $\mathcal{B}$ (60; 1/2)

La probabilité d'obtenir 25 *Pile* sur les 60 lancers est

$$p(X = 25) = C_{60}^{25} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{25} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{35} \approx 0,045.$$

■

Exemple : *Jeu de dé*

On jette un dé bien équilibré à 6 faces. La probabilité d'obtenir le numéro 6 sur un lancer est de $1/6$. On considère l'épreuve qui consiste à lancer 60 fois de suite le dé, en notant à chaque fois le numéro obtenu.

On considère maintenant 2 variables aléatoires distinctes :

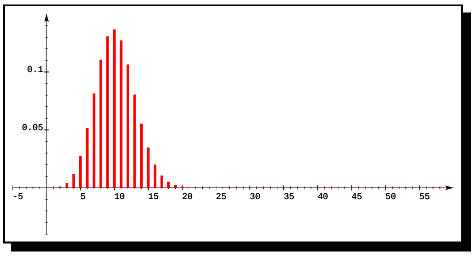
On note X la variable aléatoire qui à chaque épreuve de 60 lancers associe le nombre de fois où l'on a obtenu le numéro 6, et on note Y la variable aléatoire qui à chaque épreuve de 60 lancers associe le nombre de fois où l'on a **pas** obtenu le numéro 6.

Ces 2 variables sont évidemment liées : quel que soit la série de 60 lancers, on aura $X + Y = 60$.

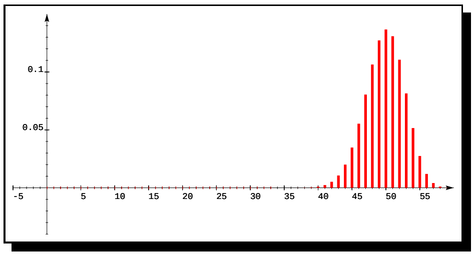
Que ce soit du point de vue de la variable X ou de celui de la variable Y, l'expérience consistant à lancer une fois le dé est indépendante des autres expériences, et ne comporte que 2 issues possibles (on obtient le 6 ou pas, le succès du point de vue de X étant l'échec du point de vue de Y et réciproquement).

On en déduit que la variable X suit la loi binômiale $\mathcal{B}(60; 1/6)$ alors que la variable Y suit la loi binômiale $\mathcal{B}(60; 5/6)$.

Les représentations graphiques de ces lois sont données ci-dessous :



loi binômiale $\mathcal{B}$ (60; 1/6)



loi binômiale $\mathcal{B}$ (60; 5/6)

La probabilité d'obtenir 10 fois le numéro 6 sur 60 lancers est :

$$\begin{aligned} p(X = 10) = C_{60}^{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{50} &= \frac{60!}{10!50!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{50} \\ &= \frac{60 \times 59 \times \ldots \times 51}{10 \times 9 \times \ldots \times 2 \times 1} \times \frac{5^{50}}{6^{60}} \approx 0,137 \end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir 50 fois un autre numéro que le numéro 6 sur les 60 lancers est :

$$\begin{aligned} p(Y = 50) = C_{60}^{50} \left(\frac{5}{6}\right)^{50} \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{10} &= \frac{60!}{50!10!} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{50} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \\ &= \frac{60 \times 59 \times \ldots \times 51}{10 \times 9 \times \ldots \times 2 \times 1} \times \frac{5^{50}}{6^{60}} \approx 0,137 \end{aligned}$$

Ces deux probabilités sont bien sûr égales puisque, comme $X + Y = 60$, on a $Y = 60 - X$ et donc

$$p(X = 10) = p(-X = -10) = p(60 - X = 60 - 10) = p(Y = 50).$$

Ici, les espérances des variables X et Y sont respectivement

$$E(X) = 60 \times \frac{1}{6} = 10 \qquad \text{et} \qquad E(Y) = 60 \times \frac{5}{6} = 50.$$

■

2. Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire dénombrable X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, suit une *loi de Poisson de paramètre* λ ($\lambda > 0$), si et seulement si, pour tout entier naturel k,

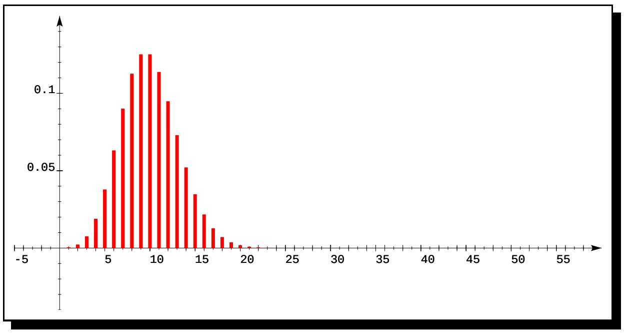
$$\boxed{p(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}$$

On note $\mathcal{P}(\lambda)$ cette loi, et on montre alors que son espérance, sa variance et son écart-type vérifien

$$\boxed{E(X) = \lambda} \qquad \boxed{V(X) = \lambda} \qquad \boxed{\sigma(X) = \sqrt{\lambda}}$$

Dans la pratique, si n est « grand », p « voisin » de 0 et np pas « trop grand », on considère en général la loi de Poisson de paramètre np comme une *bonne approximation* de la loi binômiale. Plus précisément, si $n \geqslant 50$, $p \leqslant 0,01$ et $np \leqslant 10$, alors on considère que la loi $\mathcal{B}(n, p)$ est « proche » de la loi $\mathcal{P}(np)$, ce qui permet d'utiliser la loi de Poisson (à un seul paramètre) plutôt que la loi binômiale (à deux paramètres). Les calculs s'en trouvent alors singulièrement simplif és. . .

On retiendra que, **sous certaines conditions, on peut approcher une loi binômiale par une loi de Poisson ayant la même espérance**.



loi de Poisson de paramètre 10

3. Loi normale (dite de Laplace-Gauss)

3.1 - Cas général

Une variable aléatoire **continue** X suit une *loi normale de paramètres* m *et* λ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f défini par

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}} \qquad \text{où} \qquad \sigma \geqslant 0 \quad \text{et} \quad m \in \mathbb{R}.$$

Elle est notée $\mathcal{N}(m, \sigma)$ et on montre que sa variance et son écart-type vérifien :

$$\boxed{E(X) = m} \qquad \boxed{V(X) = \sigma^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\sigma(X) = \sigma}$$

En étudiant les variations de cette fonction, on remarque que

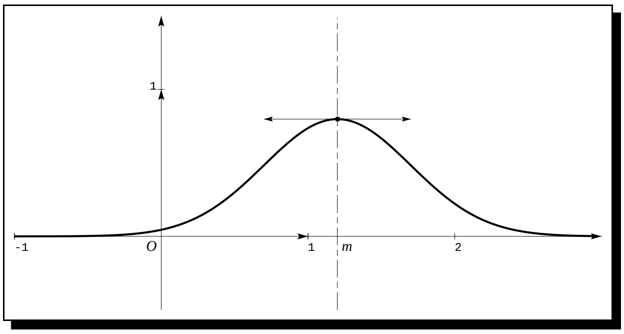
$$f(x + m) = f(x - m).$$

La courbe C_f présente donc une symétrie par rapport à l'axe vertical d'équation $x = m$.

On a $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) 2 \cdot \left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)^1 \cdot \dfrac{1}{\sigma}$, du signe opposé à $(x - m)$. d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		m		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$	$\searrow$	0

et la courbe



loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, avec $m = 1,2$ et $\sigma = 0,5$

3.2 - Loi normale centrée réduite

On appelle *loi normale centrée réduite* la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ de paramètres $m = 0$ et $\sigma = 1$. Et on a le théorème suivant, qui permet de ramener l'étude de toute loi normale à l'étude de la loi normale centrée réduite.

Théorème

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, alors la variable aléatoire $T = \dfrac{X - m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. ■

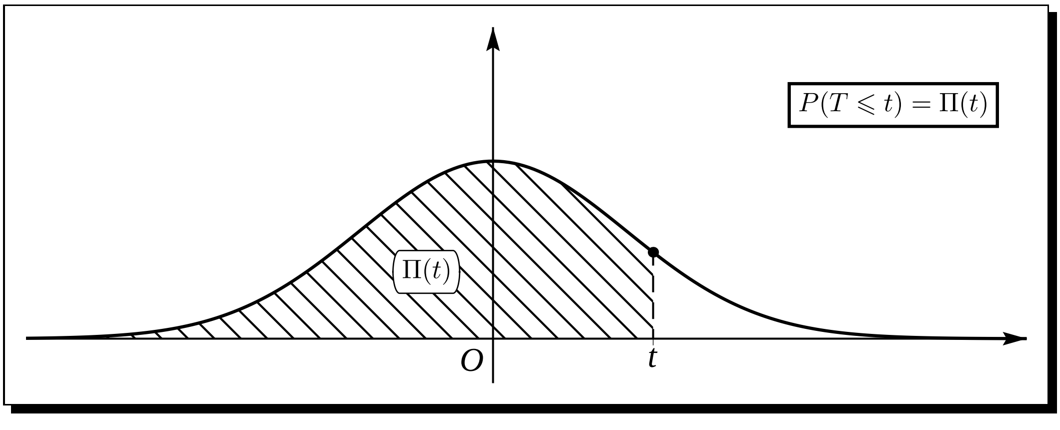
La densité de probabilité de cette loi, et la fonction de répartition sont données par :

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}},} \qquad \text{et} \qquad \boxed{P(T \leqslant t) = \Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt}$$

alors qu'espérance, variance et écart-type sont donnés par

$$\boxed{E(T) = 0} \qquad \boxed{V(T) = 1} \qquad \boxed{\sigma(T) = 1}$$

et sa courbe représentative est la suivante :



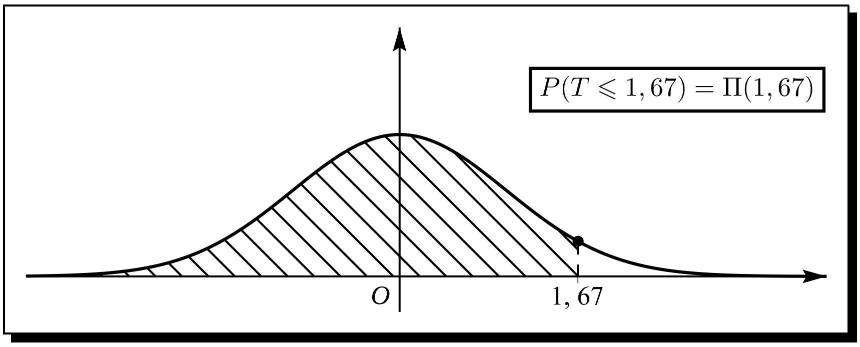
loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

Pour calculer la probabilité d'un événement concernant une variable aléatoire T suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, on utilise en général la table du formulaire et les deux propriétés suivantes :

- cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,
- l'aire totale comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1.

Exemples :

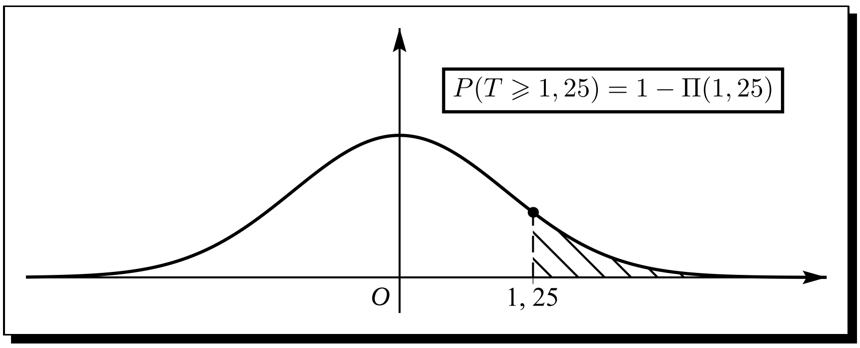
1. Calcul de $P(T \leqslant 1,67) = \Pi(1,67)$



a table donne directement le résultat. Il suffi de trouver les deux premiers chiffres de t dans la colonne, soit $1,6$: le troisième chiffre de t est indiqué dans la première ligne, soit $0,07$. La réponse est donnée à l'intersection de la ligne correspondant à $1,6$ et de la colonne correspondant à $0,07$, soit $P(T \leqslant 1,67) = 0,952\,5$.

t	$0,00$	$0,01$	$\dots$	$0,07$	$\dots$
$0,0$	$0,500\,0$	$0,504\,0$	$\dots$	$0,527\,9$	$\dots$
$0,1$	$0,539\,8$	$0,543\,8$	$\dots$	$0,567\,5$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$1,6$	$0,945\,2$	$0,946\,3$	$\dots$	$0,952\,5$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

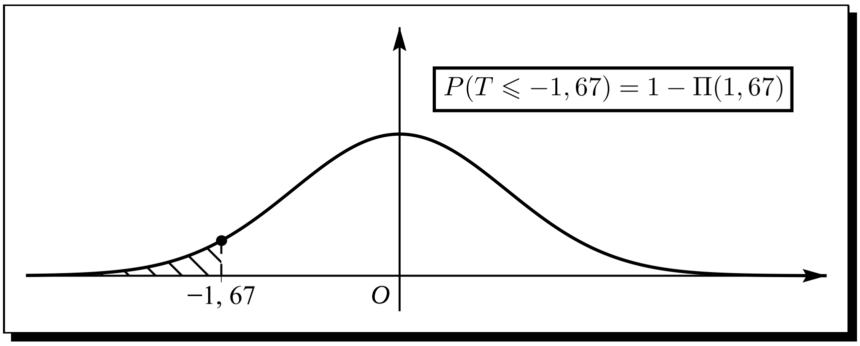
2. Calcul de $P(T \geqslant 1,25)$.



On a $P(T \geqslant 1,25) = 1 - P(T < 1,25)$, car $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
Or $\Pi(1,25) = P(T \leqslant 1,25)$ et $P(T = 1,25) = 0$ puisque T est une variable aléatoire **continue**, d'où :

$$\begin{aligned} P(T \geqslant 1,25) &= 1 - \Pi(1,25) \\ &= 1 - 0,894\,4 \\ &= 0,105\,6. \end{aligned}$$

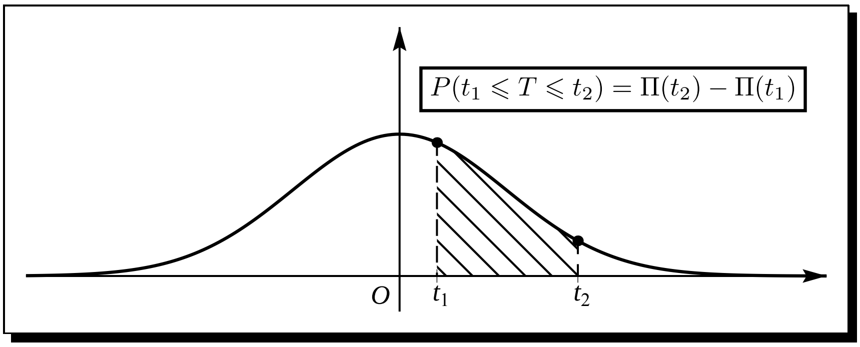
3. Calcul de $P(T \leqslant -1,67)$.



On a

$$\begin{aligned} P(T \leqslant -1,67) &= \Pi(-1,67) \\ &= P(T \geqslant 1,67) \qquad \text{vu la symétrie de la courbe} \\ &= 1 - \Pi(1,67) \\ &= 1 - 0,952\,5 \\ &= 0,047\,5 \end{aligned}$$

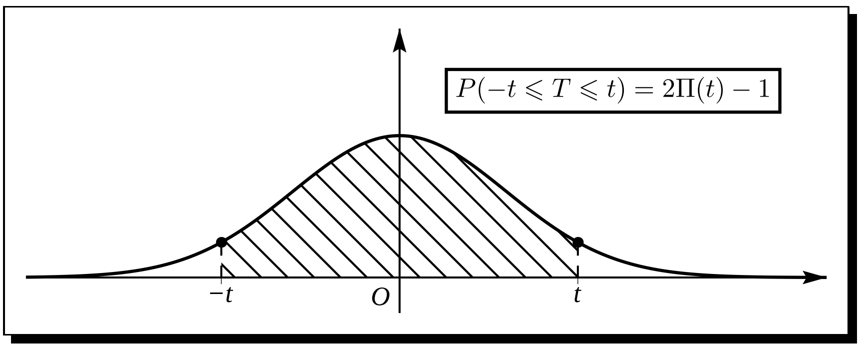
4. Calcul de $P((t_1 \leqslant T \leqslant t_2)$.



On a bien évidemment

$$\boxed{P(t_1 \leqslant T \leqslant t_2) = \Pi(t_2) - \Pi(t_1).}$$

5. Dans le cas particulier où $t_1 = -t_2$, on a



$$\begin{aligned} P(-t \leqslant T \leqslant t) &= \Pi(t) - \Pi(-t) \\ &= 2\,[\Pi(t) - \Pi(0)] \qquad \text{vu la symétrie de la courbe} \end{aligned}$$

Or $\Pi(0) = 1/2$, d'où

$$\boxed{P(-t \leqslant T \leqslant t) = 2\Pi(t) - 1}$$

Par exemple

$$P\left(-\frac{2}{3} \leqslant T \leqslant \frac{2}{3}\right) \simeq 0,5 \qquad P(-1 \leqslant T \leqslant 1) \simeq 0,68 \qquad P(-2 \leqslant T \leqslant 2) \simeq 0,95$$
$$P(-2,6 \leqslant T \leqslant 2,6) \simeq 0,99 \qquad P(-3 \leqslant T \leqslant 3) \simeq 0,997$$

■

3.3 - Retour au cas général

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. On sait que la variable $T = (X - m)/\sigma$ suit alors la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Si on veut calculer la probabilité $p(a \leqslant X \leqslant b)$, on se ramène à la variable T, qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, pour pouvoir se servir du formulaire. On procède alors de la façon suivante :

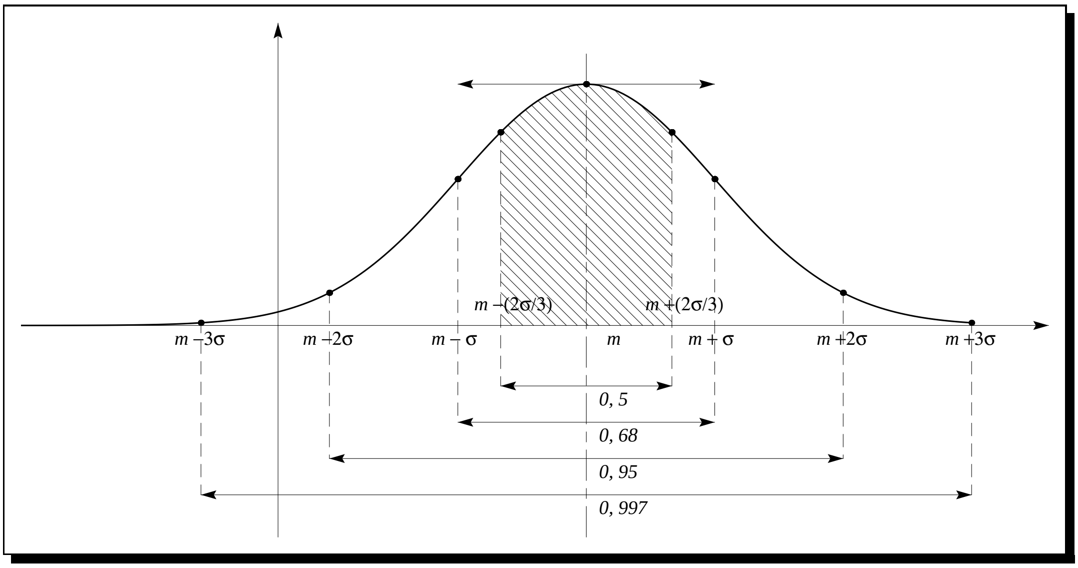
$$\begin{aligned} P(a \leqslant X \leqslant b) &= P(a - m \leqslant X - m \leqslant b - m) \\ &= P\left(\frac{a-m}{\sigma} \leqslant \frac{X-m}{\sigma} \leqslant \frac{b-m}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a-m}{\sigma} \leqslant T \leqslant \frac{b-m}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

3.4 - Quelques aires remarquables

Avertissement : les valeurs indiquées dans ce paragraphe ne sont données qu'à titre **indicatif** afi de donner un ordre d'idée. Pour un calcul précis (intervalle de confianc par exemple), il faut impérativement se reporter aux formulaires dédiés.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. On sait que la variable $T = (X - m)/\sigma$ suit alors la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$,

Sur le graphique ci-dessous, on indique quelques une des aires remarquables :



loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ et quelques aires remarquables

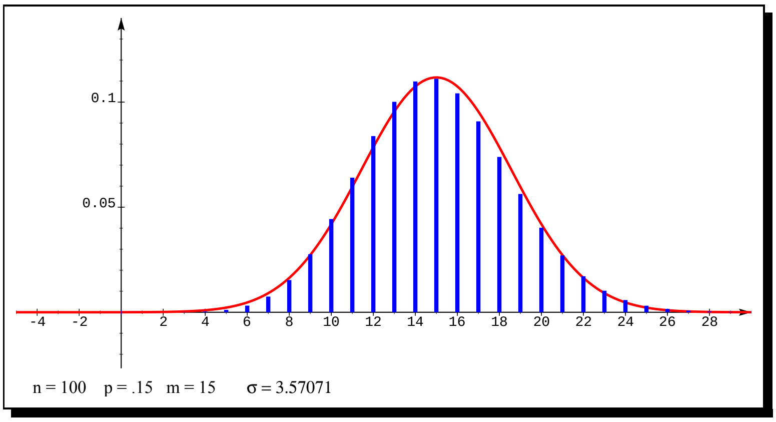
En effet, on a $X = m + \sigma T$. Pour tout réel $t > 0$, le calcul de $P(-t \leqslant T \leqslant t)$ donne alors

$$\begin{aligned} P(-t \leqslant T \leqslant t) &= P(-t\sigma \leqslant \sigma T \leqslant t\sigma) \\ &= P(m - t\sigma \leqslant m + \sigma T \leqslant m + t\sigma) \\ &= P(m - t\sigma \leqslant X \leqslant m + t\sigma) \end{aligned}$$

On a ainsi, par exemple, $P(m - 2\sigma \leqslant X \leqslant m + 2\sigma) = 2\Pi(2) - 1 \approx 0,95$. (Ce n'est qu'une approximation assez grossière : pour plus de précision, il faudrait prendre $t = 1,96$ et non pas $t = 2$.)

3.5 - Approximation d'un loi binômiale par une loi normale

On admet que si n est « grand » et p ni « trop proche de 0 », ni « trop proche de 1 », alors la loi $\mathcal{B}(n, p)$ est très proche de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ où $m = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. On convient en général d'utiliser cette approximation lorsque np et $n(1-p)$ sont supérieurs à 15. On remarque que, lors d'une telle approximation, la moyenne et l'écart-type sont conservés.



Approximation de la loi $\mathcal{B}(100; 0,15)$ par la loi $\mathcal{N}(15, \sqrt{100 \times 0,15 \times 0,85})$

Exercices

1. Dénombrements et probabilités simples

Exercice 1 : Une situation de non équiprobabilité : le dé truqué

Un dé a été truqué de telle sorte que la probabilité de sortie du 6 soit la triple de celle de sortie du 1. Les numéros $1, 2, 3, 4, 5$ ayant la même probabilité de sortie.

a) Calculer la probabilité de sortie de chaque numéro.

b) Calculer la probabilité de l'événement A : « *obtenir un numéro pair* ».

Exercice 2 : Diagramme et tableau en fabrication mécanique

Une usine fabrique des pièces pour l'horlogerie. Une pièce peut être défectueuse à cause d'au moins l'un de deux défauts appelés a et b. On considère un lot de 10 000 pièces dans lequel 2 % des pièces présentent le défaut a, 8 % présentent le défaut b, et $0,16$ % présentent simultanément les défauts a et b.

1. Faire un diagramme ensembliste (les « patatoïdes ») pour représenter la situation, et déterminer le pourcentage de pièces qui n'ont aucun défaut.

2. Dans le tableau ci-dessous, $\overline{A}$ (resp. $\overline{B}$) est l'ensemble des pièces ne présentant pas le défaut A (resp. B). Reproduire puis compléter ce tableau.

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			10 000

3. On choisit au hasard une pièce dans ce lot de 10 000. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

a) E_1 : « La pièce choisie présente l'un au moins des deux défauts »;

b) E_2 : « La pièce choisie présente un défaut et un seul »;

c) E_3 : « La pièce choisie ne présente aucun défaut ».

Exercice 3 : Arbre et durée de mise au point

Dans une usine, la mise au point d'un matériel électronique nécessite l'exécution de trois tâches consécutives, notées A, B et C. Un gestionnaire de l'entreprise a relevé sur une longue période les durées nécessaires pour effectuer chacune des trois tâches.

Pour A, une heure ou deux heures; pour B, quatre heures, cinq heures ou six heures; pour C, deux ou trois heures.

On admet que, pour chacune des tâches A, B, C, la durée d'exécution ne peut pas prendre à l'avenir d'autres valeurs que celles qui ont été données ci-dessus.

Dans ce qui suit, on appelle « mise au point » un triplet (a, b, c) de trois nombres donnant dans l'ordre (tâche A, tâche B, tâche C) les durées d'exécution des trois tâches.

1. À l'aide d'un arbre, donner toutes les « mise au point » possibles.

2. Chaque « mise au point » défini un événement élémentaire. L'observation sur une longue période conduit à admettre que tous les événements élémentaires sont équiprobables.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

a) E_1 : « La mise au point dure huit heures » ;

b) E_2 : « La mise au point dure au plus neuf heures » ;

c) E_3 : « La mise au point dure strictement plus de neuf heures ».

Exercice 4 : Tirages simultanés

Une boîte contient 9 jetons sur lesquels sont respectivement inscrits les nombres :

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

On tire simultanément deux jetons de cette boîte.

Les tirages sont supposés équiprobables.

On désigne par A et B les deux événements suivants :

A « *obtenir deux nombres pairs* »

B « *obtenir deux nombres multiples de 3* »

(On rappelle que 0 est un nombre pair et que 0 est multiple de 3.)

1. Montrer que
   a) la probabilité de A est $5/18$;
   b) la probabilité de B est $1/12$
   c) la probabilité de $(A \cap B)$ est $1/36$.
2. Calculer la probabilité de l'événement « *obtenir deux nombres pairs ou deux nombres multiples de 3* »

Exercice 5 : Le tiercé

Il y a vingt chevaux au départ du prix d'Australie, la grande course pour le tiercé de dimanche prochain. Seule nous intéresse l'arrivée des trois premiers chevaux.

Gagner *le tiercé dans l'ordre* consiste à trouver le nom et l'ordre d'arrivée des trois premiers. Gagner *le tiercé dans le désordre* consiste, seulement, à trouver le nom des trois premiers.

En jouant trois numéros, quelle est la probabilité de gagner dans l'ordre ? dans le désordre ?

Exercice 6 : Une situation de référence : Tirages dans une urne

Dans tout cet exercice, les résultats seront exprimés sous forme de fraction irréductible.

Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules rouges. On effectue des tirages dans cette urne, chacune des 20 boules ayant la même probabilité d'être tirée.

1. **Tirages successifs avec remise :** On tire successivement 3 boules, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a) 2 boules blanches et une boule rouge, dans cet ordre ?
   b) 2 boules blanches et une boule rouge dans un ordre quelconque ?
   c) au moins une rouge?
2. **Tirages successifs sans remise :** Reprendre les questions précédentes, mais en supposant cette fois que l'on tire successivement 3 boules, la boule tirée n'étant pas remise dans l'urne après chaque tirage.
3. **Tirages simultanés :** On tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a) 2 boules blanches et une boule rouge ?
   b) au moins une rouge ?

Exercice 7 : Tirages successifs avec et sans remise

1. **Tirages avec remise**

   On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes bien battu, on note le résultat, on remet la carte dans le jeu, on bat les cartes et on tire à nouveau une carte au hasard. Un résultat est un couple de cartes. Tous les couples sont équiprobables.

   Quelle est la probabilité de l'événement A : « Les deux cartes tirées sont des piques » ?
2. **Tirages sans remise**

   Même question qu'au **1.** en ne remettant pas la première carte tirée dans le paquet avant de tirer la seconde carte.

2. Probabilités conditionnelles

Exercice 8 : Probabilités conditionnelles

Deux machines M_A et M_B produisent chaque jour respectivement 100 et 200 pièces du même modèle. La machine A sort 5% de pièces défectueuses, la machine M_B en sort 6%.

1. Faire un diagramme ensembliste pour représenter la situation journalière.
2. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant qui résume la situation journalière :

	Nombre de pièces produites par M_A	Nombre de pièces produites par M_B	Total
Nombre de pièces défectueuses			
Nombre de pièces non défectueuses			
Total			300

3. Un jour donné, on choisit au hasard une pièce parmi la production des deux machines. On admet que l'on est dans une situation d'équiprobabilité.
   On considère les événements suivants :
   A : « *La pièce choisie provient de la machine* M_A »
   B : « *La pièce choisie provient de la machine* M_B »
   D : « *La pièce choisie est défectueuse* »
   $\overline{D}$: « *La pièce choisie n'est pas défectueuse* »
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   $$A, \qquad B, \qquad D, \qquad \overline{D}, \qquad A \cap D, \qquad B \cap \overline{D}.$$
4. On note $p_D(A)$ la probabilité de l'événement « *A sachant D* », autrement dit la probabilité que la pièce choisie provienne de la machine M_A, sachant que cette pièce est défectueuse.
   a) Déterminer les probabilités $p_D(A)$ et $p_{\overline{D}}(B)$.
   b) À l'aide des questions précédentes, vérifie que l'on a bien
   $$p_D(A) \times p(D) = p(A \cap D) \qquad \text{et} \qquad p_{\overline{D}}(B) \times p(\overline{D}) = p(B \cap \overline{D})$$

Exercice 9 : Imprimerie et probabilités conditionnelles

Dans une imprimerie, la fabrication journalière d'un quotidien conduit à deux défauts de fabrication :
- le défaut D : « *présence de taches d'encre sur la dernière page du journal* »;
- le défaut A : « *présence de taches d'encre sur la page des offres d'emplois* ».

La probabilité qu'un journal, pris au hasard dans la fabrication, présente le défaut D est $0,0045$.

La probabilité qu'un journal, pris au hasard dans la fabrication, présente le défaut A est $0,0025$.

La probabilité qu'un journal, pris au hasrd dans la fabrication, présente le défaut D sachant qu'il présente le défaut A est $0,8$.

On choisit un journal au hasard dans la fabrication.

1. Calculer la probabilité qu'il présente les deux défauts.
2. Calculer la probabilité qu'il présente le défaut A sachant qu'il présente le défaut D.
3. Calculer la probabilité qu'il présente au moins un défaut.

Exercice 10 : Le mondial de l'automobile

On effectue une enquête sur les goûts des consommateurs concernant les accessoires automobiles.

Dans la population interrogée, 90% souhaitent un véhicule équipé d'un autoradio, 15% souhaitent la climatisation, et 12% souhaitent ces deux équipements.

1. On choisit un individu au hasard dans cette population. Tous les individus ont la même probabilité d'être choisis.
   a) Quelle est la probabilité qu'il ne souhaite pas d'autoradio ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il souhaite au moins un des deux équipements ?
2. On choisit un individu au hasard un individu parmi ceux qui souhaitent la climatisation. Quelle est la probabilité qu'il souhaite également un autoradio ?

Exercice 11 : Fiabilité de contrôles de moteurs en Formule 1

Un constructeur de moteurs pour « Formule 1 » fabrique des moteurs de compétition. La probabilité qu'un de ces moteurs soit exempt de défaut, et par suite ne casse pas lors d'un grand prix, est $0,8$. On dira pour simplifie qu'un tel moteur est « bon », et on notera B l'événement : « *le moteur est bon* ».

Avant chaque Grand Prix, un contrôle très sévère est effectué : soit le moteur est déclaré utilisable, soit il est rejeté.

On note U l'événement : « *le contrôle déclare le moteur utilisable* ».

Ce contrôle n'est pas infaillible :

- sachant qu'un moteur est bon, il est déclaré utilisable dans 95% des cas;
- sachant qu'un moteur a un défaut, il est rejeté dans 80% des cas.

On choisit un moteur au hasard la veille du grand prix du Zimbabwé.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
   a) V : « *le moteur est bon et il est déclaré utilisable* »,
   b) W : « *le moteur a un défaut et il est déclaré utilisable* ».
   c) En déduire la probabilité de U.
2. Montrer que la probabilité qu'un moteur soit bon, sachant qu'il est déclaré utilisable, est $0,95$.

Exercice 12 : Groupes sanguins

Le sang humain est classé en quatre groupes distincts : A, B, AB et O. Sur une population P, les groupes sanguins se répartissent de la façon suivante :

A	B	AB	O
41%	10%	4%	45%

D'autre part, le sang peut posséder le facteur Rhésus : si le sang d'un individu présente ce facteur, il est dit de Rhésus positif (noté Rh^+), s'il ne possède pas ce facteur il est dit de Rhésus négatif (noté Rh^-).

Dans la population P, la proportion d'individus possédant ou non le facteur Rhésus se répartit de la façon suivante :

Groupe	A	B	AB	O
Rh^+	84%	81%	85%	80%
Rh^-	16%	19%	15%	20%

Ainsi, la probabilité que le sang d'un individu tiré au hasard soit de Rhésus positif sachant que son groupe est A vaut $p(\text{Rh}^+|A) = 0,84$.

Les valeurs approchées des résultats numériques finaux seront donnés au centième le plus proche.

Un individu ayant le groupe O et de Rhésus positif est appelé un donneur universel.

1. Montrer que la probabilité qu'un individu pris au hasard dans la population P soit un donneur universel est $0,36$.
2. Montrer que la probabilité qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang Rh^+ est $0,82$.

Exercice 13 : Test de contrôle dans l'industrie pharmaceutique

Une société de produits pharmaceutiques fabrique en très grande quantité un certain type de comprimés.

Un comprimé est conforme si sa masse exprimée en grammes appartient à l'intervalle $[1,2; 1,3]$.

La probabilité qu'un comprimé soit conforme est $0,98$. On choisit un comprimé au hasard dans la production.

On note :

A : l'événement « *le comprimé est conforme* »;

B : l'événement « *le comprimé est refusé* ».

On contrôle tous les comprimés. Le mécanisme de contrôle est tel que :

- un comprimé qui est conforme est accepté avec une probabilité de $0,98$.
- un comprimé qui n'est pas conforme est refusé avec une probabilité de $0,99$.

On a donc

$$p(A) = 0,98 \qquad p(\overline{B}|A) = 0,98 \qquad p(B|\overline{A}) = 0,99$$

1. Déterminer

$$p(B|A), \qquad p(B \cap A), \qquad p(B \cap \overline{A}),$$

2. Calculer

a) la probabilité qu'un comprimé soit refusé,

b) la probabilité qu'un comprimé soit conforme, sachant qu'il est refusé.

Exercice 14 : Productique

Trois machines M_1, M_2 et M_3 produisent le même type de tiges d'acier.

Les productions journalières de M_1, M_2 et M_3 sont respectivement $n_1 = 2\,200$, $n_2 = 2\,100$ et $n_3 = 1\,700$.

La probabilité qu'une tige tirée au hasard parmi la production d'une *même* machine soit défectueuse est $p_1 = 0,06$ pour M_1, $p_2 = 0,08$ pour M_2, et $p_3 = 0,07$ pour M_3.

1. Récapituler la situation journalière dans un tableau.

2. On choisit une tige au hasard dans la production d'une journée. Tous les tirages sont équiprobables. Calculer la probabilité à 10^{-3} près de chacun des événements suivants :

a) « *la tige choisie est défectueuse et provient de* M_1 »,

b) « *la tige choisie est défectueuse et provient de* M_2 »,

c) « *la tige choisie est défectueuse et provient de* M_3 »,

d) « *la tige choisie provient de* M_1*, sachant qu'elle est défectueuse* ».

Exercice 15 : C'est beau le progrès. . .

La commande d'un portail automatique est composée de trois éléments : une commande manuelle à infrarouges type plip, un récepteur, et un vérin électrique. Une étude statistique des pannes de chacun des trois éléments constitutifs du portail automatique permet d'estimer que la probabilité de panne à chaque utilisation est de $0,001$ pour la plip, $0,000\,5$ pour le récepteur, et $0,000\,1$ pour le vérin. Les pannes des trois éléments sont supposées indépendantes les unes des autre.

Calculer la probabilité de panne d'un tel système au cours d'une utilisation par l'usager.

Exercice 16 : Des plaques isolantes

Une usine fabrique des plaques isolantes pour le bâtiment. Deux défauts de fabrication seulement sont possibles : un défaut d'épaisseur noté e, et un défaut de conductivité thermique noté c.

On choisit une plaque au hasard dans la production d'une journée.

On note E l'événement « *la plaque présente le défaut* e », et C l'événement « *la plaque présente le défaut* c ».

Une étude statistique a permis de déterminer les probabilités suivantes :

$$p(E) = 0,02 \qquad \text{et} \qquad p(C) = 0,1.$$

On admet que les événements E et C sont indépendants.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

a) F_1 : « *La plaque présente les deux défauts* »,

b) F_2 : « *La plaque présente au moins un défaut (et peut-être les deux)* »,

c) F_3 : « *La plaque ne présente aucun des deux défauts* »,

La question suivante est hors barême :

d) F_4 : « *La plaque présente un et un seul des deux défauts* ».

Exercice 17 : Des erreurs dans le contrôle

Dans un atelier, on contrôle les pièces d'un certain modèle qui sont fabriquées en grande quantité. Parmi celles-ci, 2% sont défectueuses.

Le contrôle est tel que 96% des pièces non défectueuses sont acceptées, et que 98% des pièces défectueuses sont refusées.

1. On considère un lot de 10 000 pièces respectant ces pourcentages. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant :

	Nombre de pièces défectueuses	Nombre de pièces non défectueuses	Total
Nombre de pièces acceptées après le contrôle			
Nombre de pièces refusées après le contrôle			
Total			10 000

2. On choisit au hasard une pièce parmi les 10 000 d'un tel lot. On est dans une situation d'équiprobabilité. On considère les événements suivants :

E_1 : « *La pièce est défectueuse et acceptée par le contrôle* »

E_2 : « *La pièce est bonne et refusée par le contrôle* »

E_3 : « *Il y a une erreur dans le contrôle* »

Déterminer les probabilités $p(E_1)$, $p(E_2)$ et $p(E_3)$.

3. Déterminer la probabilité de l'événement « *La pièce est bonne sachant qu'elle a été refusée* ».

Variables aléatoires

Exercice 18 : Dans une urne...

Dans cet exercice, les tirages sont équiprobables.

Une urne contient quatre boules noires et quatres boules blanches. On tire simultanément quatre boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules noires tirées.

Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} près de son écart-type.

Exercice 19 : Urne et loi binômiale

Dans une urne, il y a 10 boules blanches et 18 boules rouges indiscernables au toucher. On considère l'épreuve qui consiste à extraire au hasard, l'une après l'autre et sans remise, deux boules de l'urne. On est dans une situation d'équiprobabillité. On donnera, pour chaque résultat, la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.

1. Déterminer la probabilité de l'événement E : « *La première boule tirée est blanche* ».

2. On répète cinq fois de suite l'expérience précédente. Après chaque épreuve, les deux boules tirées sont remises dans l'urne. Les cinq épreuves élémentaires précédentes sont donc indépendantes.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie de cinq épreuves, associe le nombre de fois que se produit l'événement E.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 20 : Prévisions de vente – Fonction de répartition

Une entreprise de fournitures industrielles commercialise des pièces de rechange pour pompes hydrauliques. On a relevé sur une longue période le nombre de pièces de type A vendues.

L'étude statistique permet d'admettre que la variable aléatoire X qui associe à un jour ouvrable choisi au hasard pendant un mois le nombre de pièces vendues ce jour-là a une loi de probabiloité défini par le tableau suivant.

On donnera les valeurs approchées arrondies à 10^{-2} près des résultats.

nombre x_i de pièces vendues	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$0,10$	$0,16$	$0,25$	$0,30$	$0,13$	$0,05$	$0,01$

1. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X. Que représente $E(X)$?
3. Calculer la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

Exercice 21 : La loterie

Une partie de loterie consiste à lâcher une bille dans un appareil qui comporte six portes de sortie, numérotées de 1 à 6.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le numéro de la porte de sortie franchie. Sa loi de probabilité est défini par le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$1/32$	$5/32$	$10/32$	$10/32$	$5/32$	$1/32$

La règle du jeu est la suivante : un joueur mise 2 francs; il reçoit 12 francs si la bille franchit les portes 1 ou 6, 2 francs si elle franchit les portes 3 ou 4. Les portes 2 et 5 ne rapportent rien.

Le « gain » d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue de la partie et sa mise. Le gain peut donc être éventuellement un nombre négatif ou nul.

Soit Y la variable aléatoire qui à chaque partie effectuée par un joueur donné associe le gain.

1. Quelles sont les valeurs possibles de Y ?
2. Déterminer la loi de probabilité de Y.
3. Un jeu est équitable si l'espérance de gain est nulle. Ce jeu est-il équitable ?

Les lois de probabilités classiques

1. Loi binômiale

Exercice 22 : Loi binômiale : un cas d'école

On considère une épreuve aléatoire débouchant sur deux éventualités : succès et échec, de probabilités respectives $0,7$ et $0,3$.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à n épreuves aléatoires indépendantes le nombre k de succès.

On désigne par Y la variable aléatoire qui associe à n épreuves aléatoires indépendantes le nombre k d'échecs.

1. *a*) Quelles sont les lois suivies par X et Y ?

   b) Déterminer, en fonction de n, l'expression de :

$$P(X = k), \qquad P(Y = k), \qquad P(X = 0), \qquad P(X \geqslant 1), \qquad P(Y = n).$$

2. *a*) On suppose que $n = 10$. Calculer

$$P(X = 0), \qquad P(X = 2), \qquad P(X \leqslant 2), \qquad P(X > 2).$$

   b) Toujours avec $n = 10$, déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 23 : Loi binômiale et contrôle de livraison

À la livraison d'un nombre très important de pièces dont 1% sont défectueuses, on prélève au hasard un échantillon de 50 pièces.

La population est suffisammen importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces. On a donc une succession de cinquante épreuves indépendantes.

On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement de 50 pièces le nombre de pièces défectueuses.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binômiale. Donner les paramètres de cette loi.

2. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité des événements suivants :

a) A : « *L'échantillon ne comporte aucune pièce défectueuse* »;

b) B : « *L'échantillon comporte une seule pièce défectueuse* »;

c) C : « *L'échantillon comporte au moins deux pièces défectueuses* »;

Exercice 24 : Dans le secteur de l'électronique

Une entreprise du secteur de l'électronique fabrique des résistances en grande série. Une étude statistique a montré que la probabilité qu'une résistance prise au hasard dans le'ensemble de la production journalière soit défectueuse est 2.10^{-3}.

On tire avec remise dix résistances dans la production d'une journée. Les tirages sont donc indépendants.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

a) A : « *Obtenir un jour donné exactement 2 résistances défectueuses* »,

b) B : « *Obtenir un jour donné au plus 2 résistances défectueuses* »,

c) C : « *Obtenir un jour donné au moins 2 résistances défectueuses* »,

Tous les résultats ser(ont donnés à 10^{-6} près.

Exercice 25 : Loi binômiale dont un paramètre est à déterminer

On désigne par X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $0,01$, notée $\mathcal{B}(n; 0,01)$.

1. Déterminer n pour que $P(X = 0) \leqslant 0,01$.

2. Déterminer n pour que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,90$.

Exercice 26 : Contrôle de qualité : Bernoulli à l'usine

Dans tout cet exercice, et sauf indication contraire, les résultats seront donné à 10^{-4} près.

Une usine produit des articles dont 5% présentent des défauts.

En vue du contrôle de qualité, on constitue un échantillon de 120 articles choisis au hasard dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 120 articles.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 120 articles, associe le nombre d'articles défectueux.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. (Justifie .)

2. Déterminer la probabilité pour que l'échantillon ne contienne aucun article défectueux.

3. Déterminer la probabilité pour que l' échantillon contienne au plus un article défectueux.

4. Déterminer la probabilité pour que l'échantillon contienne au moins deux articles défectueux.

2. Loi de Poisson

Exercice 27 : Loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 4. Déterminer la probabilité d'avoir $7 \leqslant X \leqslant 9$.

Exercice 28 : Loi de Poisson : détermination du paramètre

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson. Déterminer à 10^{-2} près le paramètre λ sachant que $P(X = 0) = 0,3$.

(*Indication* : Utiliser la définitio de la loi de Poisson.)

Exercice 29 : Loi de Poisson : lecture inverse de la table

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 7. Déterminer la plus petite valeur de k vérifian $P(X \leqslant k) \geqslant 0,80$.

Exercice 30 : Il faut . . . éliminer !

Une usine produit des bouteilles d'eau. Parmi celles-ci, 3% sont défectueuses.

On appelle X la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 bouteilles prises au hasard, associe le nombre de bouteilles défectueuses. On admet que X suit une loi de Poisson de paramètre 3.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

1. « *Un tel lot n'a aucune bouteille défectueuse* »
2. « *Un tel lot a deux bouteilles défectueuses* »
3. « *Un tel lot a trois bouteilles défectueuses* ».

Exercice 31 : Contrôle de qualité : Bernoulli et Poisson à l'usine

Dans tout cet exercice, et sauf indication contraire, les résultats seront donné à 10^{-4} près.

Une usine produit des articles dont 5% présentent des défauts.

En vue du contrôle de qualité, on constitue un échantillon de 120 articles choisis au hasard dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 120 articles.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 120 articles, associe le nombre d'articles défectueux.

1. *a*) Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. (Justifie .)
   b) Déterminer la probabilité pour que l'échantillon ne contienne aucun article défectueux.
   c) Déterminer la probabilité pour que l' échantillon contienne au plus un article défectueux.
   d) Déterminer la probabilité pour que l'échantillon contienne au moins deux articles défectueux.
2. On admet qu'on peut approcher la loi précédente par une loi de Poisson.
   a) Expliquer pourquoi le paramètre de cette loi est 6.
   b) Déterminer dans ce cas la probabilité que l'échantillon contienne au moins un article défectueux.
   c) Déterminer dans ce cas la probabilité que l'échantillon contienne au plus trois articles défectueux. (On donnera le résultat à 10^{-3} près.)

Exercice 32 : Approximation d'un loi binomiale par une loi de Poisson

Dans cet exercice chaque probabilité demandée sera calculée à 10^{-3} près.

Une petite entreprise emploie 20 personnes. Une étude statistique permet d'admettre qu'un jour donné la probabilité qu'un employé donné soit absent est $0,05$. On admet que les absences des employés survenues un jour donné sont indépendantes les unes des autres. On note X la variable aléatoire qui à chaque jour choisi au hasard associe le nombre d'employé absents.

On admettra que X suit une loi binômiale $\mathcal{B}(20; 0,05)$.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
   a) E_1 : « *un jour donné il y a exactement 3 absents* »;
   b) E_2 : « *un jour donné il y a strictement plus de 2 absents* »;
   c) E_3 : « *un jour donné le nombre d'absents est compris entre 3 et 6 (bornes comprises)* ».
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable X. Que représente $E(X)$?
3. On approche la loi binômiale du **1.** par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$, où n et p sont les paramètres de cette loi binômiale.
   a) En utilisant la loi de Poisson, déterminer les probabilités respectives des trois événements E_1, E_2 et E_3 de la question **2.**.
   b) Vérifie que les résultats obtenus au **4.** diffèrent de moins de 1% des résultats obtenus au **2.**.

Exercice 33 : Approximation d'un loi binomiale par une loi de Poisson

Dans cet exercice chaque probabilité demandée sera calculée à 10^{-3} près.

Une petite entreprise emploie 20 personnes. Une étude statistique permet d'admettre qu'un jour donné la probabilité qu'un employé donné soit absent est $0,05$. On admet que les absences des employés survenues un jour donné sont indépendantes les unes des autres. On note X la variable aléatoire qui à chaque jour choisi au hasard associe le nombre d'employé absents.

On admettra que X suit une loi binômiale $\mathcal{B}(20; 0,05)$.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

a) E_1 : « *un jour donné il y a exactement 3 absents* »;

b) E_2 : « *un jour donné il y a strictement plus de 2 absents* »;

c) E_3 : « *un jour donné le nombre d'absents est compris entre 3 et 6 (bornes comprises)* ».

2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable X. Que représente $E(X)$?

3. On approche la loi binômiale du **1.** par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$, où n et p sont les paramètres de cette loi binômiale.

a) En utilisant la loi de Poisson, déterminer les probabilités respectives des trois événements E_1, E_2 et E_3 de la question **2.**.

b) Vérifie que les résultats obtenus au **4.** diffèrent de moins de 1% des résultats obtenus au **2.**.

3. Loi normale

Exercice 34 : Loi normale centrée réduite

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer :

a) $p(X \leqslant 0,85)$.

b) $p(X \geqslant 0,85)$.

c) $p(X \leqslant -0,85)$.

d) $p(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96)$.

e) $p(X \geqslant -1,96)$.

Exercice 35 : Loi normale centrée

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 3)$. Déterminer :

a) $p(X \leqslant 0,85)$.

b) $p(X \geqslant 0,85)$.

c) $p(X \leqslant -0,85)$.

d) $p(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96)$.

e) $p(X \geqslant -1,96)$.

Exercice 36 : Loi normale

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20, 5)$. Calculer

a) $p(X \leqslant 28)$

b) $p(X \geqslant 28)$

c) $p(X \geqslant 12)$

d) $p(X \leqslant 12)$

e) $p(12 \leqslant X \leqslant 28)$

Exercice 37 : Gestion de parc automobile et loi normale

Une entreprise de transport a un parc total de 150 camions. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque camion choisi au hasard dans le parc, associe la distance qu'il a parcouru dans une journée. (Les distances sont mesurées en kilomètres.) Une étude statistique permet d'admettre que cette variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne 120 et d'écart-type 14.

Déterminer à 10^{-4} près la probabilité qu'un camion parcourt un jour donné une distance comprise entre 110 et 130 kilomètres (on utilisera éventuellement une interpolation affine)

Exercice 38 : À consommer avec modération (loi normale)

On ajoute du SO_2 dans un vin pour le protéger d'une part des attaques des levures et des bactéries, d'autre part de l'oxydation.

Après embouteillage, on prélève des échantillons de 50 bouteillses sur la chaîne d'embouteillage et on dose dans chaque bouteille la concentration en SO_2 libre qui sera exprimée en mg.L^{-1}.

La production étant très importante, on assimile ce prélèvement à un prélèvement non exhaustif. Voici les résultats du dosage de SO_2 dans un échantillon.

Concentration (en mg.L^{-1})	Nombre de bouteilles
$[20; 20,2[$	3
$[20,2; 20,4[$	9
$[20,4; 20,6[$	20
$[20,6; 20,8[$	13
$[20,8; 21[$	5

1. *statistiques* : Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de la moyenne m et de l'écart-type σ de cet échantillon.
2. *probabilités* : À chaque production obtenue après avoir rajouté du SO_2, on associe la concentration en SO_2 libre. On défini ainsi une variable aléatoire X. On admet que X suit la loi normale de moyenne $20,5$ mg.L^{-1} et d'écart-type $0,2$ mg.L^{-1}.

   On estime que le vin est impropre à la consommation si la concentration en SO_2 libre est supérieure ou égale à $20,9$ mg.L^{-1}.

   Sous ces hypothéses, quel est, a 1% près, le pourcentage de bouteilles impropres à la consommation ?

Exercice 39 : Loi normale, lecture inverse de la table

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer le nombre a tel que :

a) $p(X \leqslant a) = 0,99$.
b) $p(X \leqslant a) = 0,01$.
c) $p(X \geqslant a) = 0,05$.
d) $p(X \geqslant a) = 0,90$.

Exercice 40 : Loi normale, lecture inverse de la table

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 5)$. Déterminer le nombre a tel que :

a) $p(X \leqslant a) = 0,99$.
b) $p(X \leqslant a) = 0,01$.
c) $p(X \geqslant a) = 0,05$.
d) $p(X \geqslant a) = 0,90$.

Exercice 41 : Granulométrie, *bts mai, session 1992*

Le but de cet exercice est d'étudier une méthode de granulométrie fréquemment utilisée dans l'industrie sucrière pour calibrer le sucre blanc en foncion de la taille de ses cristaux.

– Partie A –

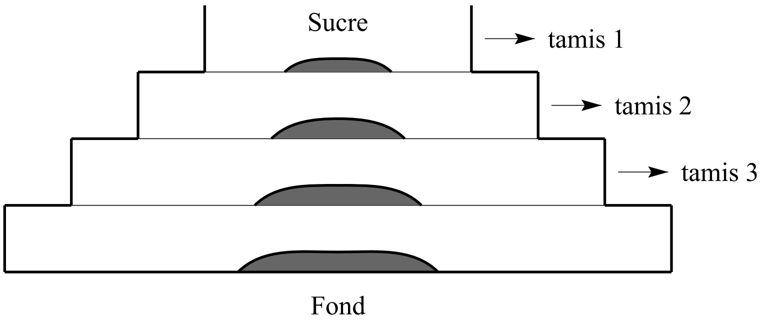
Pour effectuer un calibrage il faut que le sucre soit bien sec, or dans 5% des cas celui-ci est trop humide et l'opération ne peut être effectuée. On fait dix calibrages successifs.

a) Quelle est la probabilité pour que tous les calibrages puissent être effectués ?
b) Quelle est la probabilité pour que deux calibrages au plus ne puissent être faits à cause de l'humidité du sucre ?

– Partie B –

Le sucre est bien sec.

Le calibrage consiste alors à faire passer le sucre au travers d'une série de tamis emboîtés les uns sur les autres et posés sur un fond.



On admettra que la variable aléatoire X prenant pour valeur la taille des cristaux de sucre suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.
Dans le cadre de cet exercice on supposera qu'on dispose de 3 tamis dont voici les ouvertures de mailles en mm :

Tamis n°1 : ouverture 0, 8 mm;
Tamis n°2 : ouverture 0, 5 mm;
Tamis n°3 : ouverture 0, 2 mm.

Les cristaux de sucre dont la taille est inférieure à 0, 2 mm se retrouvent dans le fond à la fi du calibrage.

1. Compléter le tableau suivant :

Niveau de récupération	Taille des cristaux de sucre récupérés
Tamis n°1	$0,8 \leqslant X$
Tamis n°2	$\ldots \leqslant X < \ldots$
Tamis n°3	$\ldots \leqslant X < \ldots$
Fond	$X < 0,2$

2. On verse 1 800 g de sucre dont la taille des cristaux X suit la loi normale de moyenne $m = 0,58$ mm et d'écart-type $\sigma = 0,2$ mm.

a) Calculer la probabilité de l'événement : $[X < 0,2]$ et la probabilité de l'événement $[0,5 \leqslant X < 0,8]$.

b) Estimer la masse de sucre récupéré d'une part dans le fond et d'autre part dans le tamis n°2.

3. On constate maintenant que $m = 0,65$ mm etque 40% de la quantité de sucre initialement versé se retrouve dans le tamis n°2. Quelle est alors la valeurs de l'écart-type σ de la variable aléatoire X ?

Exercice 42 : Coupes de plaques d'acier, *bts mai, session 1994*

Dans un atelier, une machine A permet de couper des plaques d'acier dont la longueur permet de défini une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne $M = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$ (les longueurs étant exprimées en cm).

1. *a*) Quelle est, à 10^{-2} près par défaut, la probabilité qu'une plaque ait une longueur extérieure à l'intervalle $[98; 102]$?

b) Trouver une valeur approchée à 10^{-2} près du nombre a tel que 90% des plaques aient une longueur dans l'intervalle $[100 - a; 100 + a]$.

2. On supppose maintenant que 3% des plaques coupées par la machine A sont rejetées parce que leur longueur ne convient pas. Dans un lot contenant un grand nombre de plaques, on en prélève N. X est la variable aléatoire qui, à cette épreuve, associe le nombre de plaques dont la longueur est incorrecte.

a) Quelle est la loi suivie par X ?

b) On suppose $N = 5$. Calculer $p(X = 2)$.

c) On suppose $N = 100$. Quel est le paramètre de la loi de Poisson par laquelle on peut approcher la loi de X ? Donner alors une valeur approchée à 10^{-2} près de $p(X = 8)$, de $p(X > 2)$.

3. La machine A coupe 500 plaques par jour, dont 3% sont rejetées. On lui adjoint une machine B, et 9% des plaques coupées par cette machine B sont rejetées.

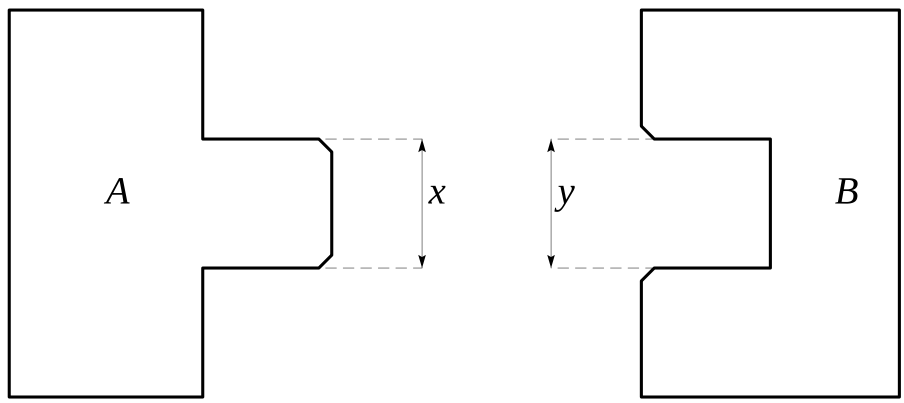
a) La machine B coupe 1 000 plaques par jour.

Quelle est alors la probabilité pour qu'une plaque coupée dans l'atelier soit rejetée ?

b) On veut que la probabilité de rejet d'une plaque reste inférieur à $,05$. Quel nombre maximum de plaques peut-on couper avec la machine B, sachant que A coupe 500 plaques par jour ?

Exercice 43 : Ajustements et probabilités, Bts Mécanique et Automatismes Industriels, *1991*

Une usine produit des pièces de type A qui doivent s'ajuster dans des pièces de type B.



1. Les différentes valeurs prises par la cote x permettent de défini une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne 20, d'écart-type $0,04$.

a) Déterminer la probabilité pour qu'une pièce de type A soit acceptable sachant que sa cote x doit être comprise dans l'intervalle $[19,92\,;20,08]$.

b) On suppose maintenant que la proportion de pièces défectueuses de type A réalisées est $0,05$. On prélève des échantillons de 100 pièces. Soit T la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de pièces défectueuses d'un échantillon.

• Quelle est la loi de probabilité de T ? On admettra qu'on peut l'assimiler à une loi de Poisson dont on donnera le paramètre.

• Déterminer la probabilité de l'événement : $\left[T < 4\right]$

2. Les différentes valeurs prises par la cote y permettent de défini une variable aléatoire Y suivant une loi normale de moyenne $20,1$ et d'écart-type $0,03$. On suppose d'autre part que les pièces de type A et B peuvent s'assembler si le jeu entre les cotes, $y - x$, est au moins égal à $0,01$.

On rappelle que si X et Y sont des varables aléatoires suivant des lois normales de moyennes m_x et m_y, de variances V_x et V_y, alors $Y - X$ suit une loi normale de moyenne $m_y - m_x$ et de variance $V_x + V_y$.

a) Déterminer la moyenne et l'écart-type de la variable $Y - X$.

b) Quelle est la probabilité qu'une pièce de type A prise au hasard puisse être introduite dans une pièce de type B également prise au hasard ?