Logarithme

Table des matières

1 Définition, Propriétés

On a vu au chapitre précédent que, pour tout $x > 0$, l'équation $e^x = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Définition 1. Pour tout réel $x > 0$, on appelle **logarithme népérien** de x, noté $\ln x$, l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\exp y = x$.
On a ainsi :

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = \exp y$$

Propriété 1.
- $\ln 1 = 0$,
- $\ln e = 1$,
- Pour tout $x > 0$, $\quad e^{\ln x} = x$,
- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\quad \ln e^y = y$,

2 Propriétés algébriques du logarithme

Théorème 2. Pour tous réels strictement positifs a et b, on a : $\quad \ln a + \ln b = \ln a \times b$.

Théorème 3. Pour tous réels strictement positifs a et b, et pour tout entier naturel n on a :
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln a^n = n \ln a$
  Cette formule reste valable pour $n \in [0; +\infty[$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2} \ln a$

3 Fonction logarithme népérien

3.1 Définition

Définition 2. On appelle *fonction logarithme népérien*, notée $\ln$ la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \ln : &]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

Propriété 4.
- La fonction logarithme népérien est définie sur $]0; +\infty[$.
- La fonction logarithme népérien est *continue* et *dérivable* sur $]0; +\infty[$.

3.2 Dérivée

Théorème 5. Dérivée
La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a pour tout $x>0$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Théorème 6. Variations
La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et on a :

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	||	$+$	1	$+$	
$\ln x$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3.3 Limites

Théorème 7. Limites
La fonction logarithme népérien admet les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

  On dit que la courbe du logarithme népérien admet une *asymptote verticale* d'équation $x=0$.

Théorème 8. Croissances comparées
La fonction logarithme népérien admet les croissances comparées suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

Remarque.

- Dans les limites précédentes, on peut remplacer x par x^a avec $a>0$ et conserver le même résultat.
- La fonction logarithme népérien croît très lentement vers $+\infty$.

  Par exemple, pour qu'elle atteigne l'ordonnée 10, il vaut atteindre environ $22\ 026$ en abscisses ...

3.3.1 Courbe représentative