Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes.

1. $\ln e^{-1}$ 2. $\ln e^2$ 3. $\ln \sqrt{e}$ 4. $\ln \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 5. e^{ln2} 6. $e^{-\ln 3}$ 7. $e^2 \ln 2$ 8. $e^{\frac{1}{2}\ln 3}$

Exercice 2.
Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $\ln t + \dfrac{1}{2} = 0$
2. $e^t - 2 = 0$
3. $e^{2t} - 4e^t + 3 = 0$
4. $2\ln x = \ln 3 + \ln(2x+3)$
5. $\ln \dfrac{1}{t} \geq -2$
6. $\ln(x-3) < 2$
7. $\ln(4t^2 - 16) = \ln(1-2t)$
8. $\ln(2x^2 - 5x + 1) > \ln(1+2x)$

Exercice 3. Calculer les limites suivantes si elles existent :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(2x+1)$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(2x+1)$
3. $\lim\limits_{x \to 0} (x - \ln x)$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x)$

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 + \ln x$.

1. Étudier les limites de f en 0 et $+\infty$. En déduire les asymptotes éventuelles.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation complet.
3. Tracer la courbe de f dans un repère orthogonal.

Exercice 5. Mêmes questions avec f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1;e]$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

1. Calculer $f'(x)$. Étudier son signe et en déduire le sens de variation de f.
2. Tracer la courbe représentant f dans un repère orthogonal d'unités 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.
3. Démontrer qu'il existe un unique réel a dans l'intervalle $[1;2]$ tel que $f(a) = 1$.
   Donner une valeur approchée de a à 10^{-2} près.

Exercice 7. n est un entier naturel. Résoudre les inéquations :

1. $1,1^n \geq 2$
2. $\left(1 - \dfrac{3}{100}\right)^n \leq \dfrac{1}{2}$

Exercice 8. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2(1+\ln x)}{x}$.

1. (a) Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. Donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution.
   (b) Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'inéquation $f(x) > 0$.
2. On donne le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$. Justifier tous les éléments contenus dans le tableau (variations, limites, valeurs numériques).

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

3. Dans une entreprise, on a modélisé par la fonction f sur $[0.2\,;+\infty[$ le bénéfice mensuel (éventuellement négatif) réalisé en vendant x milliers d'objets fabriqués.
   Ce bénéfice est exprimé en milliers d'euros.
   En utilisant les résultats des questions précédentes :
   (a) Quel nombre minimal d'objets l'entreprise doit-elle fabriquer pour que le bénéfice soit positif ?
   (b) Combien faut-il fabriquer d'objets pour rendre le bénéfice maximal ? Quel en est le montant ?