La fonction exponentielle

Table des matières

1 Introduction

La pression atmosphérique
Le 19 septembre 1648, à l'aide de deux tubes remplis de mercure, l'un au pied du Puy de Dôme, l'autre monté au sommet, l'expérience imaginée par Blaise Pascal met en évidence la pression atmosphérique.
On note en particulier une décroissance régulière de cette pression, proportionnelle à l'altitude.
Cette propriété se traduit par la relation $p'(h) = -\dfrac{g}{k}p(h)$ où $p(h)$ est la fonction qui mesure la pression à l'altitude h, g est l'accélération de la pesanteur et k une constante.

La radioactivité
Après la découverte par Becquerel des rayons uraniques, Marie Curie choisit en 1897 comme sujet de thèse l'étude des propriétés de ces rayons.
Elle découvre, aidée de Pierre, d'autre matières radioactives que l'uranium : le polonium et le radium.
Le nombre d'atomes de radium qui se désintègrent en un temps donné est proportionnel à leur nombre à chaque instant, c'est à dire : $N'(t) = -aN(t)$ où $N(t)$ est le nombre d'atomes à l'instant t et a une constante positive.
En physique, on montre expérimentalement que les noyaux radioactifs « meurent sans vieillir ». C'est Gamov qui le premier, en 1928, a expliqué ce phénomène à l'aide de la toute nouvelle mécanique quantique.

Il existe ainsi de nombreuses situations en sciences expérimentales et en sciences économiques dans lesquelles des phénomènes peuvent être modélisés par des équations du type $y' = ky$, où y désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Résoudre sur I l'équation différentielle que l'on note $y' = ky$, c'est rechercher toutes les fonctions f dérivables sur l'intervalle I qui vérifie la relation :

$$f'(x) = kf(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ de } I$$

Si de plus, le problème considéré impose aux fonctions f cherchées des conditions qui se traduisent par une égalité de la forme $f(x_0) = y_0$ où x_0 et y_0 sont deux réels donnés avec x_0 élément de I, on dit que l'on résout **l'équation différentielle avec condition initiale** (à savoir $f(x_0) = y_0$) que l'on note alors :

$$\begin{cases} y' = ky \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

2 L'équation différentielle $y' = y$, $y(0) = 1$

Théorème : Il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On admet l'existence d'une solution f de l'équation différentielle.

Conséquences :

1. Si f est une solution de l'équation différentielle $y' = y$, $y(0) = 1$,
   alors, pour tout réel x, $f(-x)f(x) = 1$ et $f(x) \neq 0$.
2. Si f est une solution de l'équation différentielle $y' = y$, $y(0) = 1$, alors elle est unique.

Démonstration :

1. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = f(-x)f(x)$; f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, ϕ l'est aussi et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\phi'(x) = -f'(-x)f(x) + f(-x)f'(x) = -f(-x)f(x) + f(-x)f(x) = 0$.
   ϕ est donc constante sur $\mathbb{R}$ et $\phi(0) = 1$ donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = 1$, ou $f(-x)f(x) = 1$.
   La propriété établit alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.
2. On suppose qu'il existe une fonction g solution de l'équation différentielle et on cherche à établir $f = g$.
   D'après la conséquence 1, il suffit de prouver que pour $x \in \mathbb{R}$, $f(-x)g(x) = 1$.
   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :$h(x) = f(-x)g(x)$.
   h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -f'(-x)g(x) + f(-x)g'(x) = -f(-x)g(x) + f(-x)g(x) = 0$,
   donc h est constante sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = 1$, d'où pour tout réel x : $f(-x)g(x) = 1$. Alors $f = g$ et f est unique.

Définition : L'unique solution f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ est appelée **fonction exponentielle** et est notée exp.

On note e le nombre $\exp(1)$.

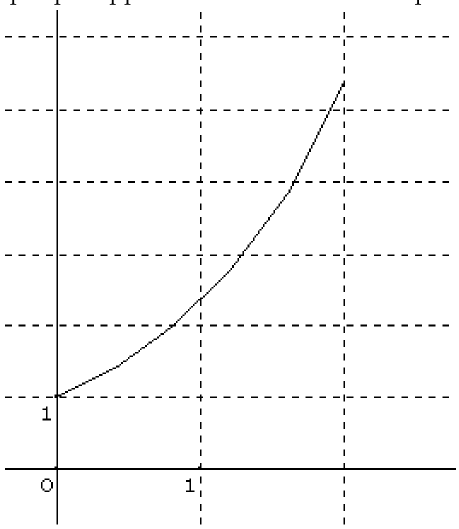
Approximation par la méthode d'Euler

on découpe l'intervalle [0 ;2] à l'aide des réels :
$x_0 = 0$; $x_1 = 0,4$; $x_2 = 0,8$; $x_3 = 1,2$; $x_4 = 1,6$ et $x_5 = 2$

Pour une fonction f dérivable en a, l'approximation affine de $f(a+h)$, pour h proche de 0, associée à f est $f(a)+hf'(a)$.
Donc pour la fonction exponentielle et pour $a = x_n$ (où $0 \leq n \leq 4$), $h = 0,4$, on obtient :
$\exp(x_n + 0,4) \simeq \exp(x_n) + 0,4\exp'(x_n)$ c'est à dire $\exp(x_n + 0,4) \simeq \exp(x_n) + 0,4\exp(x_n)$
autrement dit : $\exp(x_n + 0,4) \simeq 1,4\exp(x_n)$.
On obtient alors $\exp(x_0) = 1$ et de proche en proche :

- $\exp(x_1) \simeq 1,4\exp(x_0)$, c'est à dire $\exp(x_1) \simeq 1,4$
- $\exp(x_2) \simeq 1,4\exp(x_1)$, c'est à dire $\exp(x_2) \simeq 1,4^2$
- $\exp(x_3) \simeq 1,4\exp(x_2)$, c'est à dire $\exp(x_3) \simeq 1,4^3$
- $\exp(x_4) \simeq 1,4\exp(x_3)$, c'est à dire $\exp(x_4) \simeq 1,4^4$
- $\exp(x_5) \simeq 1,4\exp(x_4)$, c'est à dire $\exp(x_5) \simeq 1,4^5$.

On obtient ainsi une représentation graphique approchée de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0; 2]$.



3 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

3.1 les relations

Propriété : Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Démonstration : Soit a un réel quelconque; il suffit détablir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x+a) = \exp(x) \times \exp(a)$, que la première conséquence permet d'écrire $\exp(x+a)\exp(-x) = \exp(a)$.
On définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par : $h_a(x) = \exp(x+a)\exp(-x)$. h_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'_a(x) = \exp(x+a)\exp(-x) + \exp(x+a)(-\exp(-x)) = 0$; d'où h_a est une fonction constante et comme $h_a(0) = \exp(a)$, on obtient l'égalité souhaitée.

Théorème : Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1 \\ \text{pour tous réels } a \text{ et } b,\ f(a+b) = f(a)f(b) \end{cases}$
alors f est la fonction exponentielle.

Propriété : Pour tout réel a, $\exp(a) > 0$

Démonstration : On a déjà démontré dans les conséquences du théorème d'existence de la fonction exponentielle que pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Supposons qu'il existe un réel a tel que $\exp(a) < 0$.
Comme exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$, et donc sur l'intervalle de bornes 0 et a, et $\exp(a) < 0 < \exp(0)$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel b tel que $\exp(b) = 0$, ce qui est impossible.
En conclusion, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\exp(a) > 0$.

Propriété : Pour tous réels x et y,

1. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
2. $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
3. Pour tout entier relatif p, $\exp(px) = (\exp(x))^p$.

La relation 1. est une conséquence du premier théorème, la relation 2. est déduite de la relation 1. et de la propriété 1.

3.2 le nombre e, la notation e^x

En utilisant la relation 3., pour $x = 1$, on obtient : $\exp(p) = e^p$ car $\exp(1) = e$.
Par extension de l'écriture $\exp(p) = e^p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on note :
pour tout x de $\mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.
Avec cette nouvelle notation :

- $e^0 = 1$; $e^1 = e$
- pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout b de $\mathbb{R}$, $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
- pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout entier relatif n, $(e^a)^n = e^{na}$.

3.3 applications

Exercice 1 : Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est impaire.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$ en multipliant numérateur et dénominateur par e^x
d'où $g(-x) = g(x)$ et g est une fonction impaire.

Exercice 2 : Montrer que pour tout réel x, $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$.
$(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) = 4e^{x-x} = 4$.

4 Etude de la fonction exponentielle

4.1 sens de variation

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
En effet, la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$. Donc pour tout réel x, $\exp'(x) > 0$ et la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquences :

1. Pour tous réels a et b, $\exp(a) < \exp(b)$ équivaut à $a < b$.
2. Pour tous réels a et b, $\exp(a) = \exp(b)$ équivaut à $a = b$.

Exercice : Résoudre l'équation $\exp(2x+5) = \exp\left(\dfrac{3}{x}\right)$
L'expression $2x + 5$ est définie pour tout réel x, et l'expression $\dfrac{3}{x}$ est définie pour tout réel $x \neq 0$.

On résout alors l'équation sur $E = \mathbb{R}^*$.
$\exp(2x+5) = \exp\left(\dfrac{3}{x}\right) \iff 2x+5 = \dfrac{3}{x} \iff 2x^2+5x-3 = 0$ et $x \neq 0$
Les solutions de cette dernière équation sont -3 et $\dfrac{1}{2}$ qui appartiennent à E, donc l'équation
$\exp(2x+5) = \exp\left(\dfrac{3}{x}\right)$ a deux solutions : -3 et $\dfrac{1}{2}$.

Exercice : Résoudre l'inéquation $\exp(x^2-4) \leq \exp(-3x)$
Les expressions x^2-4 et $-3x$ sont définies sur $\mathbb{R}$, donc on résout l'équation sur $E = \mathbb{R}$.
$\exp(x^2-4) \leq \exp(-3x) \iff x^2-4 \leq -3x \iff x^2+3x-4 \leq 0$.
Le trinôme x^2+3x-4 a deux racines : 1 et -4, donc $x^2-4 \leq -3x$ sur $[-4;1]$, donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-4;1]$.

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x}+8e^x+6 = 0$.
$2e^{2x}+8e^x+6 = 0 \iff 2(e^x)^2+8e^x+6 = 0$
En posant $X = e^x$, on obtient $2X^2+8X+6 = 0$ et les solutions de cette équation sont -1 et -3.
On résout alors les équations $e^x = -1$ et $e^x = -3$, mais comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, on en déduit que les équations $e^x = -1$ et $e^x = -3$ n'ont pas de solution. Donc l'équation $2e^{2x}+8e^x+6 = 0$ n'admet pas de solution.

4.2 limites usuelles

Théorème :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (3) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (5) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

Démonstration : (1) Montrons que pour tout réel x positif, $e^x \geq x$.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = e^x - x$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = e^x - 1$
Or pour tout réel $x \geq 0$, $e^x \geq 1$ et $g'(x) \geq 0$. La fonction g est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et comme $g(0) = 1$, on en déduit que pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 1$, ce qui donne $e^x \geq x+1$, donc $g(x) > x$.
On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
(2) On démontre de même que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $h'(x) = e^x - x$
or on sait, d'après le (1) que pour tout $x \geq 0$, $e^x > x$, ce qui donne $h'(x) > 0$. Donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
de plus $h(0) = 1$, donc pour tout $x > 0$, $h(x) > 0$, c'est à dire $e^x > \dfrac{x^2}{2}$ et $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.
or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
(3) On effectue une transformation d'écriture : $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$
or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
(4) On effectue une transformation d'écriture : $xe^x = -\dfrac{-x}{e^{-x}}$, et d'après le (2), $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
(5) $\dfrac{e^x-1}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre 0 et x, donc $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = \exp'(0) = 1$.
Exercice : Dans un repère orthogonal, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction exponentielle.

1. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a (avec a réel).
2. Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite T.

Solution :

1. $\exp'(a) = e^a$, donc une équation de T est $y = e^a(x-a)+e^a$.
2. On étudie le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - [e^a(x-a)+e^a]$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - e^a$ et $f'(x) > 0$ lorsque $e^x > e^a$, c'est à dire $x > a$.
   Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;a[$ et strictement décroissante sur $]a;+\infty[$.

$f(a) = e^a - e^a(a-a) - e^a = 0$ est alors le minimum de la fonction f. On en déduit que pour tout réel x, $f(x) \geq 0$, c'est à dire $e^x \geq e^a(x-a) + e^a$.
Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de T sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la courbe représentant la fonction exp est au-dessus de toutes ses tangentes.

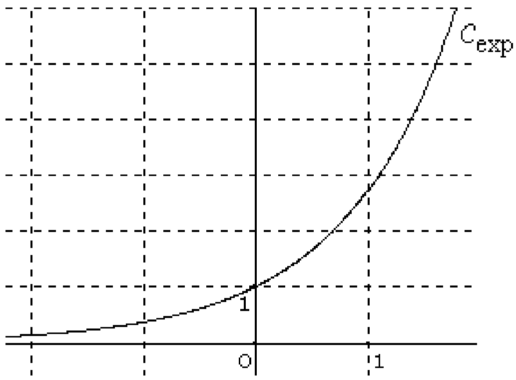
Exercice : Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 5e^x)$.

Pour tout réel $x > 0$, $2x - 5e^x = x\left(2 - 5\dfrac{e^x}{x}\right)$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - 5\dfrac{e^x}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 5e^x = -\infty$.

4.3 tableau de variation et représentation graphique

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	
exp	0 $\nearrow$	$+\infty$



Remarque : Pour tout réel $k > 0$, l'équation $e^x = k$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.

4.4 dérivée de la fonction e^u

Propriété : u est une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction f définie par : $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Exemple : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+2x}$.
Déterminer la fonction dérivée de f.
Solution : La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 2x$ est une fonction polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
pour tout réel x, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (2x+2)e^{x^2+2x}$.

5 Etude de l'équation $y' = ky$ $(k \in \mathbb{R})$

Théorème : Soient k, x_0 et y_0 trois réels donnés.

1. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ky$ est l'ensemble des fonctions f telles que :
$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = C\exp(kx) \text{ où } C \in \mathbb{R}$$
2. Il existe **une seule** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$\text{pour tout } x \text{ réel},\ f'(x) = kf(x) \text{ et } f(x_0) = y_0$$

Démonstration :

1. Soit C un réel. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{kx}$ vérifie l'équation $y' = ky$ car pour tout réel x, $f'(x) = kf(x)$.
Réciproquement : soit g une solution dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation $y' = ky$.
Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \exp(-kx) \times g(x)$,
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $h'(x) = -k\exp(-kx) \times g(x) + \exp(-kx) \times g'(x)$
Or $g'(x) = kg(x)$, d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -k\exp(-kx) \times g(x) + k\exp(-kx) \times g(x)$, c'est à dire $h'(x) = 0$.
Alors la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$, donc il existe un réel C tel que pour tout x réel, $h(x) = C$.
On en déduit qu'il existe bien un réel C tel que pour tout x réel, $g(x) = C\exp(kx) = Ce^{kx}$.
2. C est alors déterminée par x_0 et y_0 car $y_0 = f(x_0) = C\exp(kx_0)$, donc $C = y_0\exp(-kx_0)$.
D'où $f(x) = y_0\exp(-kx_0)\exp(-kx) = y_0\exp(k(x-x_0)) = y_0e^{k(x-x_0)}$.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle $\left\{\begin{array}{l} y' = -2y \\ y(1) = 5 \end{array}\right.$
Les solutions de $y' = -2y$ sont les fonctions définies pour tout x réel par :

$$f(x) = C\exp(-2x) = Ce^{-2x}, \text{ où } C \text{ est un réel.}$$

Le réel C est déterminé par la condition intiale $y(1) = 5$, c'est à dire : $C\exp(-2) = 5$, donc $C = 5e^2$.
La solution de l'équation différentielle est la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = 5e^{2-2x}$.

6 Résumé des propriétés essentielles

6.1 Définition

Définition : L'unique solution f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ est appelée **fonction exponentielle** et est notée exp.
On note e le nombre $\exp(1)$.
C'est à dire que
- La fonction $f : x \mapsto \exp x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, que sa dérivée est $f' = (\exp)' = \exp$. (ie. $f'(x) = \exp(x)$ pour tout x réel)
- et que $\exp(0) = 1$

Propriété : $\exp x > 0$ pour tout x réel.

6.2 Propriétés algébriques

Propriété : Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
On en déduit :
Propriété : Pour tous réels x et y,

1. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
2. $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
3. Pour tout entier relatif p, $\exp(px) = (\exp(x))^p$.

Conséquences :
- On peut écrire $\exp x = e^x$ pour tout x réel.
- Pour tout x réel, $\exp(x) > 0$

6.3 Variations, limites et représentation graphique

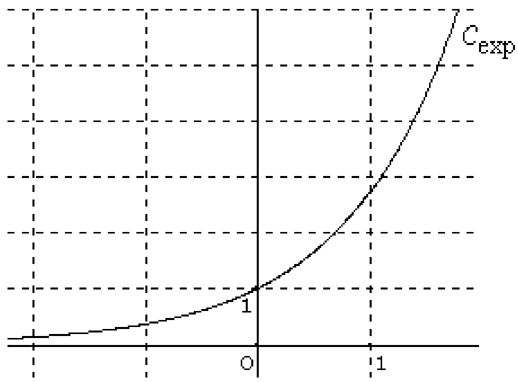
Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème : Limites

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (3) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (5) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

x	$-\infty$ $+\infty$
$\exp'(x)$	$+$
exp	$0 \nearrow +\infty$



Remarque : Pour tout réel $k > 0$, l'équation $e^x = k$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.

6.4 Dérivée de e^u

Propriété : u est une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction f définie par : $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.