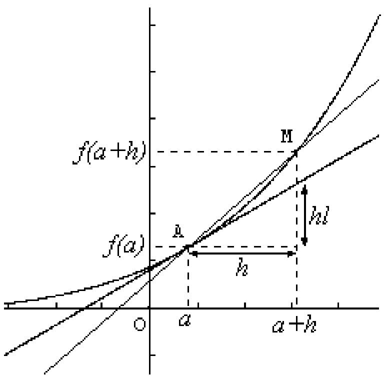
Dérivation

Table des matières

1 Fonctions dérivables

1.1 Nombre dérivé, fonction dérivée

Définition. f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I.
f est dérivable en a si l'une ou l'autre des deux propositions équivalentes est réalisée :
– la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie l en 0, ou encore que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a pour limite l quand x tend vers a.
– pour tout réel h tel que $a+h \in I$, $f(a+h) = f(a) + hl + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.
Le nombre l est appelé nombre dérivé de la fonction f en a.



Remarques :
– Le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(h \neq 0)$ est appelé taux de variation de f entre a et $a+h$.
– Soit $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(h \neq 0)$ est le coefficient directeur de la droite (AM).

Le nombre dérivé de f en a est noté $f'(a)$.
Lorsque la fonction f admet un nombre dérivé en a, on dit que f est dérivable en a.
Lorsque f est dérivable en tout point d'un intervalle I inclus dans le domaine de définition de f, on dit que f est dérivable sur I.

Définition. f est une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction dérivée de f sur I est la fonction f' qui à tout a dans I associe $f'(a)$.

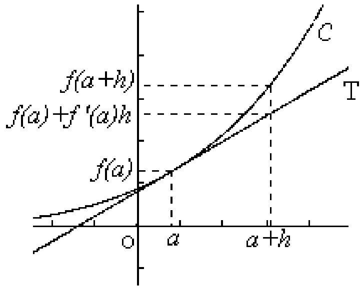
1.2 tangente et approximation affine locale

- $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère.

Une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse a est :
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

- Pour tout réel h tel que $a+h \in I$,

$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$
$f(a) + f'(a)h$ est l'approximation affine de $f(a+h)$ pour h proche de 0,
associée à f.



Exemple. f est la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
La fonction f est-elle dérivable en -1 ? en 0 ?

Solution

Pour $0 < h \leq 2$, $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \dfrac{\sqrt{2h-h^2}}{h} = \dfrac{h\sqrt{\dfrac{2}{h}-1}}{h} = \sqrt{\dfrac{2}{h}-1}$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2}{h} - 1 = +\infty$, et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ et d'après les propriétés sur les limites des fonctions composées :
$\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{\dfrac{2}{h}-1} = +\infty$.

Ceci nous donne $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = +\infty$ donc la fonction f n'est pas dérivable en -1.

Pour $-1 \leq h \leq 1$ avec $h \neq 0$, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{1-h^2}-1}{h} = \dfrac{(\sqrt{1-h^2}-1)(\sqrt{1-h^2}+1)}{h(\sqrt{1-h^2}+1)} = \dfrac{h}{\sqrt{1-h^2}+1}$.

Or $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{1-h^2}+1 = 2$ donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{1-h^2}-1}{h} = 0$.
La fonction f est alors dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

1.3 dérivabilité et continuité

Propriété. f est une fonction définie sur un intervalle I, a est un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration. On suppose que f est dérivable en a, c'est à dire, pour $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$,
$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.
Or $\lim\limits_{h\to 0} f'(a)h = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0} h\varepsilon(h) = 0$ donc $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, ce qui justifie que f est continue en a. $\square$

Remarque. la réciproque de la propriété est fausse : la fonction racine carrée est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

1.4 dérivées successives

Définition. f est une fonction dérivable sur un intervalle I. Sa fonction dérivée f' s'appelle la fonction dérivée première (ou d'ordre 1) de f .
Lorsque f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est notée f'' ; f'' est appellée dérivée seconde (ou dérivée d'ordre 2) de f.
Par itération, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définie la fonction dérivée n-ième (ou d'ordre n) comme étant la fonction dérivée de la fonction d'ordre $n-1$, $f^{(1)} = f'$ et pour tout $n \geq 2$, $f^{(n)} = f^{(n-1)'}$.

Exemple. $f : x \longmapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$ et ainsi de suite...

2 Règles de dérivation

2.1 dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	f est dérivable sur l'intervalle
λ	0	$]-\infty;+\infty[$
x	1	$]-\infty;+\infty[$
x^n ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$)	nx^{n-1}	$]-\infty;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty;+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty;+\infty[$

2.2 dérivées et opérations sur les fonctions

Propriété. u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k est un réel. Alors ku, $u+v$ et uv sont dérivables sur I et :

$$(ku)' = ku' \quad ; \quad (u+v)' = u' + v' \quad ; \quad (uv)' = u'v + uv'$$

Si, de plus v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Corollaire : Les fonctions polynômes et rationnelles sont dérivables sur tout intervalle de leur domaine de définition.

Exercice. Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$
2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$ par : $f(x) = \dfrac{4x^2+x+2}{x^2+x}$

Solution.

1. f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x-1$ et $v(x) = \sqrt{x}$

   On a alors $u'(x) = 1$; $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f' = u'v + uv'$

   $$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$, et $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 4x^2+x+2$ et $v(x) = x^2+x$

   On a alors $u'(x) = 8x+1$; $v'(x) = 2x+1$ et $f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

   $$f'(x) = \frac{(8x+1)(x^2+x) - (4x^2+x+2)(2x+1)}{(x^2+x)^2}.$$

□

2.3 dérivée d'une fonction composée

Théorème. g est une fonction dérivable sur un intervalle J. u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J.
Alors la fonction f définie par $f(x) = g \circ u(x) = g(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I,

$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x)).$$

Démonstration. Pour tout $a \in I$, pour tout réel h non nul tel que $a+h \in I$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{g(u(a+h))-g(u(a))}{h} = \frac{g(u(a+h))-g(u(a))}{u(a+h)-u(a)} \times \frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

Or u est dérivable en a, d'où $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$.
De plus, u est dérivable en a, u est donc continue en a, ce qui donne : $\lim\limits_{h\to 0} u(a+h) = u(a)$.
On a également $u(a) \in J$ et g est dérivable sur J, d'où : $\lim\limits_{X\to u(a)} \dfrac{g(X)-g(u(a))}{X-u(a)} = g'(u(a))$.

On obtient alors $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(u(a+h))-g(u(a))}{u(a+h)-u(a)} = g'(u(a))$. Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = u'(a)\times g'(u(a))$
et $g\circ u$ est dérivable en a et $(g\circ u)'(a) = u'(a)\times g'(u(a))$.

□

Remarque. On retrouve ainsi une propriété vue en première : si $g(x) = f(ax+b)$, alors $g'(x) = af'(ax+b)$.

Exemple. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par : $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$.
2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x^2)$.

Solution : 1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x) = g\circ u(x)$ où $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \sin x$.
$u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $g'(x) = \cos x$. On a alors $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f(x) = g\circ u(x)$ où $u(x) = x^2$ et $g(x) = \cos x$.
$u'(x) = 2x$ et $g'(x) = -\sin x$ et $f'(x) = -2x\sin(x^2)$.

□

2.4 deux exemples de fonctions composées

Propriété. u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I, et pour tout x de I : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Démonstration. $f(x) = g(u(x))$ où $g(x) = \sqrt{x}$ et $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
g est dérivable sur $]0;+\infty[$; pour tout x de I, $u(x) > 0$, donc la fonction $f = g\circ u$ est dérivable sur I et d'après la propriété sur la dérivée d'une fonction composée, on obtient : $f'(x) = u'(x)\times g'(u(x)) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

□

Propriété. u est une fonction dérivable sur un intervalle I et n est un entier naturel non nul.
Alors la fonction f définie par $f(x) = [u(x)]^n$ est dérivable sur I et pour tout x de I :
$f'(x) = n[u(x)]^{n-1}\times u'(x)$

Démonstration. $f(x) = g(u(x))$ où $g(x) = x^n$. Pour tout réel x, $g'(x) = nx^{n-1}$.
Alors pour tout réel x, $f'(x) = u'(x)\times g'(u(x)) = u'(x)\times n[u(x)]^{n-1} = n[(u(x)]^{n-1}\times u'(x)$.

□

Remarque. Cas où $n < 0$ et u ne s'annule en aucun point de I :
On a $f(x) = [u(x)]^n = \dfrac{1}{[u(x)]^{-n}}$. Puisque $-n > 0$, on peut appliquer la formule de la dérivée de l'inverse d'une fonction et on obtient : $f'(x) = -\dfrac{\left([u(x)]^{-n}\right)'}{\left([u(x)]^{-n}\right)^2}$
et $\left([u(x)]^{-n}\right)' = -nu'(x)\times[u(x)]^{-n-1}$ donc $f'(x) = n\dfrac{u'(x)[u(x)]^{-n-1}}{[u(x)]^{-2n}} = n\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^{-n+1}}$.
On obtient également $f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$.

Exercice. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+3x+1)^3$.
2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$.

Solution. 1. f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a $f(x) = [u(x)]^n$ où $u(x) = x^2 + 3x + 1$ et $u'(x) = 2x + 3$.
On a alors $f'(x) = 3 \times (2x + 3)(x^2 + 3x + 1)^2$.

2. Comme $x^2 + 2x + 3 > 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a $g(x) = \sqrt{u(x)}$ où $u(x) = x^2 + 2x + 3$ et $u'(x) = 2x + 2$
On a alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

□

3 Applications de la dérivation (étude de fonction)

3.1 sens de variation

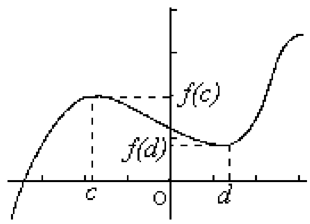
Théorème. f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$ sauf peut-être en quelques points où $f'(x)$ s'annule alors f est strictement croissante sur I.
2. Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$ sauf peut-être en quelques points où $f'(x)$ s'annule alors f est strictement décroissante sur I.
3. Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Exemple. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x^2$ pour tout réel x.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) > 0$ et $f'(0) = 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.2 extremum local

Définition. f est une fonction dérivable sur un intervalle I, c est un point de I.
Dire que $f(c)$ est un **maximum local** (resp. **minimum local**) signifie que l'on peut trouver un intervalle J inclus dans I et contenant c, tel que,
pour tout x de J, $f(x) \leq f(c)$ (resp. $f(x) \geq f(c)$).
On appelle extremum local, un maximum ou un minimum local.



Théorème. f est une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert, c est un point de I.

1. Si $f(c)$ est un extremum local, alors $f'(c) = 0$.
2. Si f' s'annule en c en changeant de signe, alors $f(c)$ est un extremum local.

Remarque. Lorsque $f(c)$ est un extremum local, la tangente à la courbe représentant f en $A(c; f(c))$ est horizontale.

3.3 Exemple : étude de la fonction tan

La fonction tangente, notée tan, est définie pour tout réel x tel que $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
Par la suite, on note D l'ensemble de définition de la fonction tan.

Propriété. Pour tout x de D, $\tan(x + \pi) = \tan x$.

Démonstration. Si $x \in D$, alors $x + \pi \in D$, et $\tan(x + \pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$. □

La fonction tan est périodique de période π.

Propriété. Pour tout x de D, $\tan(-x) = -\tan x$

Démonstration. Si $x \in D$, $-x \in D$ et $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$. $\square$

La fonction tangente est alors impaire, sa courbe représentative admet donc l'origine pour centre de symétrie.

On peut ainsi se contenter d'étudier la fonction tangente sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Propriété. La fonction tangente est dérivable en tout réel x de D et $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Démonstration. Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur D et $\cos x \neq 0$ sur D, donc la fonction tangente est dérivable sur D.
$\tan' x = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$\square$

Tableau de variation et représentation graphique

Pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan' x > 0$ donc la fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0; +\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \cos x = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$.

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$
$\tan' x$	1	$+$	$\|\|$
$\tan$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on trace la courbe qui représente la fonction tangente sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, puis par symétrie par rapport à O, on obtient la courbe Γ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Enfin, on applique à Γ les translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.