Feuille d'exercices

Dérivation et étude de fonctions (1/3)

<u>Exercice 1 :</u> *Quelques dérivées simples…*

Déterminer les dérivées des fonctions *f* suivantes :

1) $f(x)=12x^4-3x^3+6x-5$
2) $f(x)=\frac{2}{5}x^6-\frac{3x^2}{4}+\frac{x}{5}-\frac{7}{3}$
3) $f(x)=-2x^3+5x+1$
4) $f(x)=(3x^2+4)(2x-5)$ I= $]-\infty;1,5[$
5) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$
6) $f(x)=\frac{3x-1}{-2x+3}$
7) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ I= $]0;+\infty[$
8) $f(x)=\frac{x-1}{x^2+x+4}$ I= $\mathbb{R}$

<u>Exercice 2 :</u> Déterminer les dérivées des fonctions *f* suivantes définies sur I.

a) $f(x)=\sqrt{6x+5}$ $I=\left]-\frac{5}{6};+\infty\right[$

b) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ I=$\mathbb{R}$

c) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ $I=]1;+\infty[$

d) $f(x)=\ln\frac{1-x}{x^2+1}$ $I=]-\infty;-1[$

e) $f(x)=\frac{2x+1}{e^x}$ I=$\mathbb{R}$

f) $f(x)=x\frac{1}{e^{2x+1}}$ I=$\mathbb{R}$

g) $f(x)=\cos x+x\sin x$ I=$\mathbb{R}$

g) $f(x)=3\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ I=$\mathbb{R}$

h) $f(t)=Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t+\gamma)$, $A,\alpha,\omega,\gamma,$ réels donnés I=$\mathbb{R}$

<u>Exercice 3 :</u>

Le déplacement du piston dans un système bielle manivelle est donnée par la fonction :

$$x:t\mapsto r\left[\cos\omega t+m\left(1-\frac{\sin^2(\omega t)}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right],\ m,\omega,r \text{ constantes données.}$$

Calculer la vitesse $\frac{dx}{dt}$ du piston.

<u>Exercice 4 :</u>

Calculer les dérivées successives jusqu'à l'ordre trois des fonctions suivantes :

a) $f(x)=5x^4+x^3-9x^2+5$ I=$\mathbb{R}$

b) $f(x)=\frac{1}{x-a}$ $I=]a;+\infty[$

<u>Exercice 5 :</u> Déterminer les dérivées des fonctions *f* suivantes définies sur I.

a) $f(x)=x\arccos x$ $I=]-1;1[$

b) $f(x)=x\arcsin x$ $I=]-1;1[$

c) $f(x)=\arctan 2x$ I=$\mathbb{R}$

d) $f(x)=ch\frac{x}{10}$ I=$\mathbb{R}$

e) $f(x)=sh2x$ I=$\mathbb{R}$

<u>Exercice 6 :</u> Etudier le <u>signe</u> des fonctions suivantes sur I.

a) $g(t)=1+\ln t$, $I=]0;+\infty[$

b) $g(t)=3e^{-t}-1$, I=$\mathbb{R}$

c) $g(t)=\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ $I=[0;2\pi]$

Feuille d'exercices

Dérivation et étude de fonctions (2/3)

<u>Exercice 7 :</u> *Quelques fonctions simples à étudier…*

Etudier les variations des fonctions suivantes *(dérivée, tableau de variation, limites aux bornes de l'intervalle d'étude)*

1) $f(x)=4x^2-3x+2$ I= $\mathbb{R}$ 2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ I= $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

2) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ I= $\mathbb{R}$ 4) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ I= $\mathbb{R}$

<u>Exercice 8 :</u>

La courbe ci-contre est la courbe représentative sur l'intervalle $[0;4]$ de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; *a, b, c, d* réels.

1) Déterminer les réels pour que les conditions suivantes soient vérifiées :
La courbe passe par les points A et B et admet en chacun de ces points une Tangente parallèle à l'axe des abscisses.
2) Montrer que le point $I(2;2)$ est centre de symétrie de la courbe.
Utiliser $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}$

<u>Exercice 9 :</u>

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$

1) Déterminer les réels *a* et *b* pour que la courbe représentative de *f* dans un repère orthogonal soit tangente au point $I(0;3)$ à la droite (T) d'équation $y=4x+3$.
2) Etudier la position de la courbe par rapport à la droite (T) au voisinage du point I. illustrer graphiquement cette situation.

<u>Exercice 10 :</u>

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{2x}-4e^x+3$

1) Etudier les variations de la fonction *f*. on précisera les limites de *f* en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) En utilisant les résultats précédents, déterminer selon les valeurs du réel *a* le nombre de solutions de l'équation $f(x)=a$.

<u>Exercice 11 :</u>

I Soit la fonction *g* définie sur l'intervalle $I=]0;+\infty[$ par : $g(x)=x-1+\dfrac{1}{2}\ln x$

Etudier les variations de *g* ; calculer $g(1)$; en déduire le signe de $g(x)$ sur I.

II Soit la fonction *f* définie sur I par : $f(x)=\dfrac{2x-\ln x}{2\sqrt{x}}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 2cm. On appelle C la courbe représentative de *f* et C_0 la courbe représentative de la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$.

1) Déterminer les limites de *f* en 0 et en $+\infty$.
2) Déterminer la dérivée *f'* de *f*. Vérifier que, pour tout réel *x* de I, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.
3) Dresser le tableau de variations de *f*.
4) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)$.
5) Préciser les positions relatives de C et C_0. Tracer C et C_0.

Feuille d'exercices

Dérivation et étude de fonctions (3/3)

Exercice 12 :
On considère un circuit dans lequel E et r sont des constantes et R est variable (R>0).

La puissance p dissipée dans le résistor de résistance R est : $P = \frac{RE^2}{(R+r)^2}$

Déterminer, en fonction de E et r, la valeur de R pour laquelle la puissance est maximale, ainsi que cette puissance maximale.

Exercice 13 :
Soit $f(t) = at^2 + bt + c$. Déterminer a,b,c sachant que C_f a pour sommet S(1 ;5) et passe par B(3 ;1).

Exercice 14 : Soit $f(t) = Ae^x + 2e^{-x+B}$. Déterminer A et B sachant que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 2$.

Exercice 15 : Etudier la fonction $f(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $\left[\frac{1}{2};5\right]$

Exercice 16 :

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x(x+3) - 1$$

1) Déterminer la limite de g en $+\infty$ et la limite de g en $-\infty$.
2) Déterminer, à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de g. En déduire le tableau de variation de g.
3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α qui appartient à l'intervalle $]-4;0[$.
4) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ en fonction des valeurs de x.

Partie B : Etude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x + e^x(x+2)$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. (Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées.)

1) .
   a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$
   c) Etudier, en fonction des valeurs de x les positions de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_f$.
2) En remarquant que $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = e^x\left[\frac{-x}{e^x} + (x+2)\right]$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
3) Vérifier que pour tout x réel, on a $f'(x) = g(x)$.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point A d'abscisse 0.
6) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-2} près, puis une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
7) Tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, $\mathscr{C}_f$, la tangente T et l'asymptote $\mathscr{D}$.

Fonctions à valeurs complexes

Exercice 17 : Calculer les dérivées des fonctions

a) $t \mapsto (t+i)e^{it}$ b) $t \mapsto \frac{1}{t+a}$; $a = \alpha + i\beta$, α,β deux réels avec $\beta \neq 0$ c) $t \mapsto (2t-i)e^{it}$