Limites

Table des matières

1 Limite de fonctions

1.1 limite infinie en l'infini

Définition :

1. La fonction f tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$ (resp. $x \to -\infty$) si et seulement si tout intervalle $]\lambda; +\infty[$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand (resp. $-x$ assez grand).
   On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$).
2. La fonction f tend vers $-\infty$ quand $x \to +\infty$ (resp. $x \to -\infty$) si et seulement si tout intervalle $]-\infty; \lambda[$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand (resp. $-x$ assez grand).
   On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$).

Exemple : • $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
• $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ pour tous entiers n pairs et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ pour tous entiers n impairs

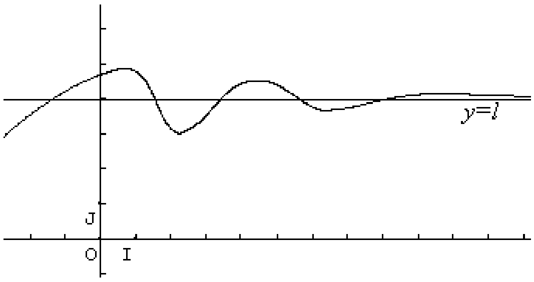
Exercice : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 + x^2$.

1. Donner les valeurs de $f(1)$, $f(10)$, $f(100)$, $f(1125)$.
2. On considère l'intervalle $]100; +\infty[$. Démontrer que pour $x > 10$, $f(x) \in]100; +\infty[$.
3. On considère un intervalle $]A; +\infty[$ avec $A > 0$, montrer que pour $x > \sqrt{A}$, tous les $f(x)$ sont dans l'intervalle $]A; +\infty[$.
4. Que peut-on en conclure ?

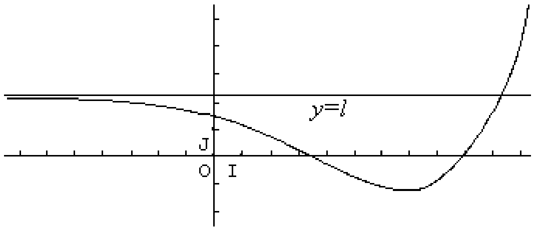
1.2 limite finie en l'infini

Définition : Soit l un réel, une fonction f tend vers l quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si tout intervalle ouvert contenant l contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand (resp. $-x$ assez grand).
On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$)

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} = l$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$), alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).



La droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction en $+\infty$.



La droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+x}{x} = 1$ car $\dfrac{2+x}{x} = \dfrac{2}{x} + 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$.

1.3 limite finie ou infinie d'une fonction en a ($a \in \mathbb{R}$)

Soient a un réel et un intervalle I contenant a ou dont a est un borne, f une fonction définie dans I sauf peut-être en a.

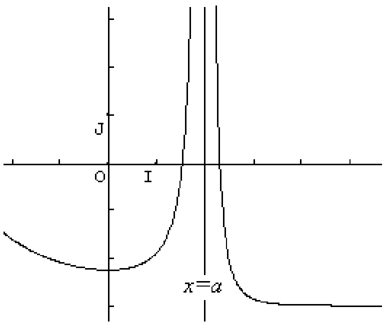
Définition : On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a si et seulement si tout intervalle ouvert contenant l contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x dans I et assez proche de a.

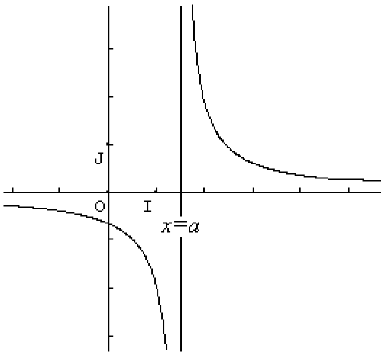
Remarque : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ équivaut à $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = l$.

Définition : On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers a si et seulement si tout intervalle $]\lambda; +\infty[$ (resp. $]-\infty; \lambda[$) ($\lambda \in \mathbb{R}$), contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x dans I et assez proche de a.

Définition : Lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.

Exemple : Si $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = +\infty$ et la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe représentative de f.



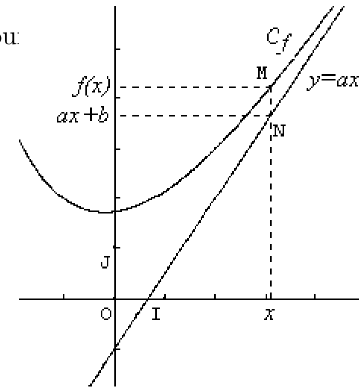


Dans les deux cas, la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction.

1.4 asymptote oblique

Définition : Si $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, alors la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, alors la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote à la cou
$-\infty$.



Remarque : On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = ax+b$.

Soit x un réel. Le point M de $\mathcal{C}$ d'abscisse x a pour ordonnée $f(x)$.

Le point N de $\mathcal{D}$ d'abscisse x a pour ordonnée $ax+b$.

$f(x) - (ax+b)$ correspond à la différence des ordonnées de ces deux points.

Exemple : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = 2x - 3 - \dfrac{4}{x}$

$f(x) - (2x-3) = -\dfrac{4}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{4}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{4}{x} = 0$,

donc la droite Δ d'équation $y = 2x-3$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

De plus, pour tout réel $x > 0$, $-\dfrac{4}{x} < 0$ et pour tout réel $x < 0$, $-\dfrac{4}{x} > 0$, donc la courbe $\mathcal{C}$ est située au-dessus de la droite Δ sur $]-\infty;0[$ et en-dessous de Δ sur $]0;+\infty[$.
On désigne par M le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse x et N le point de Δ de même abscisse. On cherche à résoudre l'inéquation $MN < 10^{-1}$.

$$MN < 10^{-1} \text{ signifie } \left|-\frac{4}{x}\right| < 10^{-1} \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} -\dfrac{4}{x} < 10^{-1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{4}{x} < 10^{-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à} \quad x < -40 \text{ ou } x > 40.$$

Exercice : Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+4}{x+1}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.
– Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
– Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
– Etudier la position relative de la droite Δ et de la courbe $\mathcal{C}$.

2 Propriétés des limites

2.1 opérations sur les limites

Dans tous les tableaux qui suivent, α désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$ et l et l' désignent deux réels.
Les fonctions f et g considérées sont définies au voisinage de α.
Les limites de ces fonctions sont déterminées en α.
(u_n) et (v_n) désignent deux suites de nombres réels.

limite d'une somme

Si (u_n) ou f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) ou g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors (u_n+v_n) ou $f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

limite d'un produit

Si (u_n) ou f a pour limite	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si (v_n) ou g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(u_n \times v_n)$ ou $f \times g$ a pour limite	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

remarque : limite en $+\infty$ de ax^n
On déduit du tableau que pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et que,
Si $a > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^n) = +\infty$ et si $a < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^n) = -\infty$.

Exemple : Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^3\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-2\right) = -2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty, \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

limite en l'infini d'une fonction polynôme
Exemple : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+2x^2-4$

$$x^3+2x^2-4 = x^3\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^3}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0 \ ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^3} = 0$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^3} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+2x^2-4 = +\infty$.
Remarque :La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction **polynôme** est la limite de son terme de plus haut degré.

limite d'un quotient

$\longrightarrow$ cas où le dénominateur a une limite non nulle

Si (u_n) ou f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Si (v_n) ou g a pour limite	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ou $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

$\longrightarrow$ cas où le dénominateur a une limite nulle

Si (u_n) ou f a pour limite	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	0
Si (v_n) ou g a pour limite	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ou $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{4x-6}$.

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} x^3 = \dfrac{27}{8}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} 4x - 6 = 0$.

Si $x > \dfrac{3}{2}$, alors $4x - 6 > 0$ et dans ce cas, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ x>\frac{3}{2}}} f(x) = +\infty$

Si $x < \dfrac{3}{2}$, alors $4x - 6 < 0$ et dans ce cas, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ x<\frac{3}{2}}} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}$ est asymptote verticale à la courbe représentant f.

limite en l'infini d'une fonction rationnelle

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+4}{3x^2-5}$

$$\frac{2x+4}{3x^2-5} = \frac{x^2\left(\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{3-\frac{5}{x^2}} \quad \text{pour } x \neq 0$$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x^2} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+4}{3x^2-5} = 0$

Remarque : La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction **rationnelle** est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré.

2.2 limite et ordre

Dans les trois propriétés qui suivent, (u_n) et (v_n) désignent deux suites de réels. l et l' sont deux réels.
De plus α désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$ et f et g sont deux fonctions définies dans un voisinage I de α.

Propriété :

1. Si $u_n \longrightarrow l$, $v_n \longrightarrow l'$ et $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $l \leq l'$.
2. Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = l'$ et pour tout x de I, $f(x) \leq g(x)$, alors $l \leq l'$.

Remarque : Cette propriété n'est pas vraie pour les inégalités strictes.

Propriété :

1. S'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq v_n$, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2. Si pour tout réel de I $f(x) \geq g(x)$, et si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$.

Propriété :

1. S'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
2. Si pour tout réel de I $f(x) \leq g(x)$, et si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$.

Exercice 1 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + \sin x$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 2 : g est la focntion définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 3 - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Théorème des gendarmes :

1. Soient (v_n) et (w_n) deux suites convergeant vers le même réel l.
   Si (u_n) est une suite telle que, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
2. α désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$, et l un réel.
   f, g et h sont trois fonctions définies sur un intervalle I voisinage de α.
   Si pour tout $x \in I$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$.

Exemple 1 : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n+3(-1)^n}{n+3}$.
Pour tout entier n, on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, ce qui donne $2n-3 \leq 2n+3(-1)^n \leq 2n+3$
et $\dfrac{2n-3}{n+3} \leq u_n \leq \dfrac{2n+3}{n+3}$
or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-3}{n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+3}{n+3} = 2$, donc la suite u_n converge vers 2.

Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
Pour tout x dans $]0;+\infty[$, $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2.3 limite de la composée de deux fonctions ou d'une fonction et d'une suite

Théorème : α, β et l désignent des réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$ et $\lim\limits_{x\to\beta} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = l$
2. Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x\to\beta} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = l$.

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4+\dfrac{1}{x^2} = 4$ et $\lim\limits_{X\to 4} \sqrt{X} = 2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}} = 2$.

2.4 Convergence de suites monotone

Définition : Soit (u_n) une suite de nombres réels.
La suite (u_n) est dite croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
La suite (u_n) est dite décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Théorème :
Une suite croissante majorée est convergente.
Une suite décroissante minorée est convergente.

Remarque : Ce théorème permet de justifier qu'une suite est convergente, il ne permet pas de déterminer la limite.