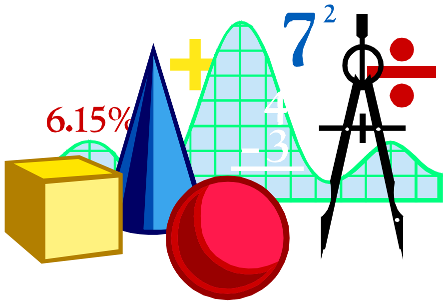
Technicien Supérieur

en Mécanique et Automatisme Industriel



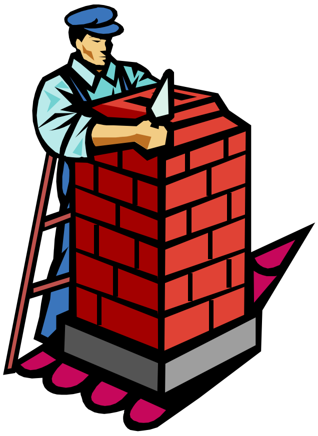
Cours

de

Consolidation

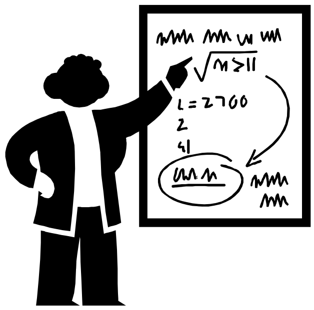
en

Mathématiques



« La rigueur vient toujours à bout de l'obstacle »

Léonard de Vinci



Conception des documents : Etienne Poulin

Etape 1. Trigonométrie

1.1. <u>L'essentiel</u>

<u>ACTIVITE 1</u> : Rappeler l'aire d'un disque et la circonférence d'un cercle de rayon *r*

<u>ACTIVITE 2</u>

- Tracer un cercle. Repérer les angles 90°, 180°, 360°.
- Si le rayon de ce cercle est de 1 Unité, sa circonférence mesure 2π.

On invente une nouvelle mesure des angles à partir de cette observation : le radian.

- 360° est égale à 2π radian.
- On peut ainsi compléter le tableau suivant :

Mesure en radian	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
Mesure en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°

<u>ACTIVITE 3</u>

La **Mesure principale d'un angle** est comprise entre $\left]-\pi;\pi\right]$

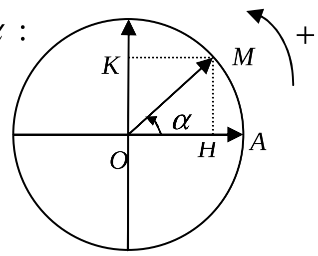
Déterminer la mesure principale des angles suivants : $\alpha = \frac{34}{3}\pi$; $\beta = \frac{25,5}{2}\pi$; $\delta = -\frac{387\pi}{6}$

<u>Définitions</u>

<u>Définition</u> : On appelle cercle trigonométrique dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ le cercle de centre O de rayon 1 pour lequel on choisit comme sens direct le sens inverse des aiguilles d'une montre.

<u>Définition</u> : M étant le point du cercle trigonométrique tel que $\left(\vec{OA},\vec{OM}\right) = \alpha$:

- L'abscisse du point M est le cosinus du nombre α noté $\cos\alpha$.
- L'ordonnée du point M est le sinus du nombre α noté $\sin\alpha$.



$\cos\alpha = \overline{OH}$ et $\sin\alpha = \overline{OK}$

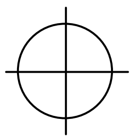
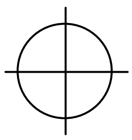
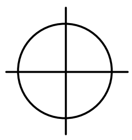
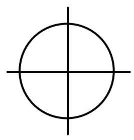
Mesure algébrique
« longueur orientée »

<u>Propriété :</u> Quel que soit le nombre réel *x* :

$-1 \le \cos x \le 1$ $\qquad$ $-1 \le \sin x \le 1$ $\qquad$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

<u>ACTIVITE 4</u>

Placer un point $\mathrm{M}\left(\cos\alpha;\sin\alpha\right)$ sur le cercle trigonométrique tel que :

$\cos\alpha > 0$	$\cos\alpha < 0$	$\cos\alpha < 0$	$\cos\alpha > 0$
$\sin\alpha < 0$	$\sin\alpha < 0$	$\sin\alpha > 0$	$\sin\alpha > 0$
			

<u>ACTIVITE 5</u>

Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions par des points du cercle trigonométrique : a) $x = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ $\qquad$ b) $2y = \pi + 2k\pi$ $\qquad$ c) $4t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Tableau de valeurs usuelles

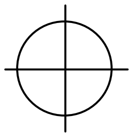
Voici quelques valeurs remarquables

Mesure en radian	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
Mesure en degré	0°	30°	45°	60°	90°
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Pas d'image

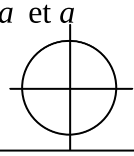
ACTIVITE 6

A l'aide d'un cercle trigonométrique, déterminons quelques propriétés :

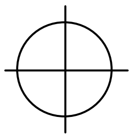
- Réels opposés : a et $-a$.
  - $\cos(-a) = \cos(a)$
  - $\sin(-a) = -\sin(a)$



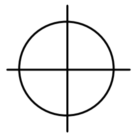
- Réels dont la somme est π . $\pi - a$ et a
  - $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
  - $\sin(\pi - a) = \sin(a)$



- Réels dont la différence est π : a et $\pi + a$
  - $\cos(\pi + a) = -\cos(a)$
  - $\sin(\pi + a) = -\sin(a)$



- Réels dont la somme est $\frac{\pi}{2}$
  - $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$
  - $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$



Résolution des équations sinx=a et cosx=a

- Si $a \notin [-1;1]$, l'équation $\sin x = a$ n'a pas de solution
- Si $a \in [-1;1]$, il existe $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, unique, tel que $\sin\alpha = a$

L'équation $\sin x = \sin\alpha$ admet deux types de solution :
(1) $x = \alpha + 2k\pi$
(2) $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ avec k entier relatif quelconque

EN TOUT ETAT DE CAUSE,
NE JAMAIS HESITER A DESSINER UN CERCLE TRIGONOMETRIQUE

- Si $a \notin [-1;1]$, l'équation $\cos x = a$ n'a pas de solution
- Si $a \in [-1;1]$, il existe $\alpha \in [0;\pi]$, unique, tel que $\cos\alpha = a$

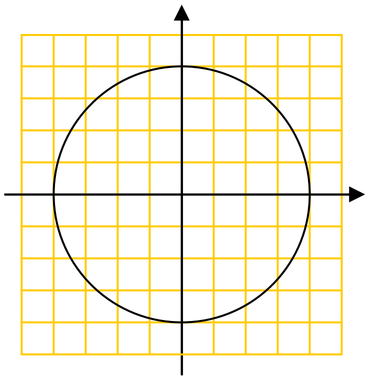
L'équation $\cos x = \cos\alpha$ admet deux types de solution :
(3) $x = \alpha + 2k\pi$
(4) $x = -\alpha + 2k\pi$ avec k entier relatif quelconque

1.2. Exercices de l'étape 1

Exercice 1 :

Déterminer la mesure principale $(]-\pi;\pi])$ des angle suivants

Et placer les sur un cercle trigonométrique



$\alpha = \dfrac{43\pi}{6}$ mesure principale :

$\beta = 27{,}5\pi$ ‘’

$\lambda = \dfrac{-5\pi}{3}$ ‘’

$\delta = \dfrac{-21\pi}{4}$ ‘’

Exercice 2 :

Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions par des points du cercle trigonométrique

a) $4t = \dfrac{4\pi}{3} + k\cdot 2\pi \quad (k \in Z)$

b) $2t = \dfrac{\pi}{2} - t + k\cdot 2\pi \quad (k \in Z)$

Exercice 3 :

a) Déterminer l'angle α tel que $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. Le placer sur un cercle trigonométrique.

b) Déterminer l'angle β tel que $\begin{cases} \cos\beta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\beta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Le placer sur un cercle trigonométrique.

c) Déterminer l'angle δ tel que $\begin{cases} \cos\delta = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} \\ \sin\delta = \dfrac{3}{\sqrt{12}} \end{cases}$. Le placer sur un cercle trigonométrique.

d) Déterminer l'angle φ tel que $\begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = -1 \end{cases}$. Le placer sur un cercle trigonométrique.

e) Déterminer l'angle μ tel que $\begin{cases} \cos\mu = -\dfrac{4}{\sqrt{32}} \\ \sin\mu = \dfrac{3}{\sqrt{18}} \end{cases}$. Le placer sur un cercle trigonométrique.

Exercice 4 : Résoudre les équations suivantes

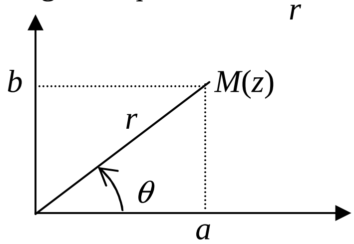
a) $\sin(3x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ b) $\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin(4t) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ d) $\cos(3x) = 0{,}5$

Etape 2. Nombre complexes

$z = 2+3i$
$z = 3i$
$z = 4$
sont des complexes

2.1. A Retenir

- L'ensemble des nombres complexes est noté ℂ. i est le nombre tel que $i^2 = -1$
- Un nombre complexe z s'écrit $z = a+ib$ où a et b sont des nombres réels, a est appelé *partie réelle, b partie imaginaire* et
- **Forme algébrique :** $z = a+ib$ où a et b sont des nombres réels.
- **Module :** $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
- **Argument :** $Arg(z) = \theta$ l'angle tel que $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$



$\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ $\qquad OM = r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Abscisse de M : $a = \mathrm{Re}(z) = r\cos\theta$

Ordonnée de M : $b = \mathrm{Im}(z) = r\sin\theta$

- **Forme trigonométrique :** $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r = |z|$ et $\theta = Arg(z)$
- **Forme exponentielle :** $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et $\theta = Arg(z)$
- **Module, Argument et conjugué, produit et quotient :**

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}' \qquad \overline{zz'} = \bar{z}\cdot\bar{z}' \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \qquad |z\times z'| = |z|\times|z'| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\arg\frac{1}{z} = -\arg z + 2k\pi \qquad \arg(z\times z') = \arg(z) + \arg(z') + k2\pi$$

$$\arg\frac{z}{z'} = \arg z - \arg z' + 2k\pi$$ où k est un entier relatif

- **Formule de Moivre :** $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ $\qquad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
- **Formule d'Euler :** $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$ et $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

- **Equations du second degré à coefficients réels**

  L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (avec a, b, c réels et $a \neq 0$) de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ admet :

  • Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

  • Si $\Delta = 0$ une solution réelle double : $z_1 = z_2 = \dfrac{-b}{2a}$

  • Si $\Delta < 0$ deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

  Dans tous les cas, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

- Rappelons les valeurs remarquables de sin et cos

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin *x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos *x*	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

2.2. Exercices de l'étape 2

Exercice 1 :

1) Dans le plan complexe $(O;\vec{u},\vec{v})$, placer les points A,B,C,D,E d'affixes respectives $1+i$; -2 ; $-2i$; 5-4i ; $-3-\frac{1}{2}i$.
2) Donner les coordonnées cartésiennes de A,B,C,D,E.
3) Déterminer l'affixe du point F$(-3;7)$.

Exercice 2 :

Mettre chacun des nombres complexes sous forme algébrique

a) $5i-(3+2i)$ b) $2(5-i)+3(i-4)$ c) $(-4+2i)^2$ d) $(5-11i)(2-i)$

e) $(3+i)(3-i)$ f) $(1+2i)^3$ g) $\sqrt{2}+i-(\sqrt{2}+3i)^2$ h) $\overline{2-3i}$

k) $\overline{(4+3i)(2-i)}$ l) $\overline{2i-3}$ m) $\frac{1}{2+3i}$ n) $\frac{1-4i}{2+3i}$ o) $\frac{i(1-7i)}{(2+3i)^2}$

Exercice 3 :

Résoudre les équations suivantes

a) $(2+i)z+4=0$ b) $\frac{z+i}{z-i}=5$ c) $5\bar{z}=4-i$ d) $\begin{cases} 2z_1-z_2=54 \\ iz_1+3z_2=7i \end{cases}$

Exercice 4 :

Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants, puis les écrire sous forme trigonométrique

a) $z_1=-\sqrt{3}+i$ b) $z_2=-17$ c) $z_3=5i$ d) $z_4=-12i\sqrt{3}+12$ e) $z_5=-6\sqrt{3}+6i$

Exercice 5 :

Soit $z_1=\sqrt{3}+i$ $\quad z_2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ $\quad z_3=-2+2i$

1) Ecrire z_2 sous forme algébrique
2) Calculer : $\bar{z}_3$, z_1+z_2, z_1+z_3, $z_1\times z_2$, $z_1\times z_3$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_1}{z_3}$.
3) Calculer : $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_3|$, $|\bar{z}_3|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$
4) Calculer $Arg(z_1)$, $Arg(z_2)$, $Arg(z_3)$, $Arg(\bar{z}_3)$, $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$
5) Ecrire sous forme trigonométrique : z_1, z_3.
6) Ecrire sous forme exponentielle : z_1, z_2, z_3.

Exercice 6 :

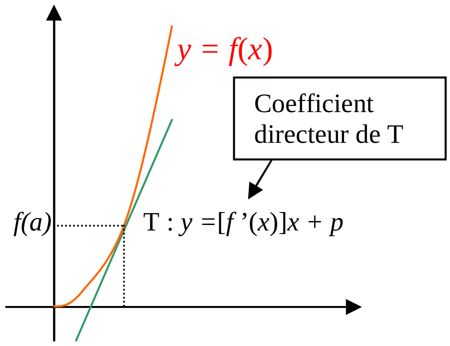
Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de : 25 ; 3 ; -2 ; -17 ; -36 ; 0.

Exercice 7 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a) $z^2-3z+18=0$ b) $z^2+9z-4=0$ c) $z^2-(1+\sqrt{3}z)+\sqrt{3}=0$ d) $z^2+2z+8=0$

Etape 3. Dérivation



3.1. L'essentiel

- **Le nombre dérivé *f* au point d'abscisse *a* est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse *a*. Il est noté *f'*(*a*).**
- Equation d'une tangente au point d'abscisse *a* : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$
- Approxiamtion affine de *f* en *a* : $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$
- Dérivées de fonctions usuelles

Dérivées usuelles

f(x)	*f'(x)*	Intervalle I
k ; k réel	0	IR
x	1	IR
$mx+p$	m	IR
x^2	$2x$	IR
x^n, *n entier naturel*	nx^{n-1}	IR
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	IR
$\cos x$	$-\sin x$	IR
$\cos(\omega t+\varphi)$	$-\omega\sin(\omega t+\varphi)$	IR
$\sin(\omega t+\varphi)$	$\omega\cos(\omega t+\varphi)$	IR
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	IR

Opération sur les fonctions dérivables

Fonction	Dérivée	Fonction composée
ku (k réel)	ku'	Si $g(t) = f(at+b)$ et si f est dérivable en $at+b$ alors $g'(t) = af'(at+b)$
$u+v$	$u'+v'$	
uv	$u'v+uv'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	
u^n	$nu'u^{n-1}$	
$g \circ u$	$u' \times (g' \circ u)$	

3.2. Exercices de l'étape 3

Exercice 1 : Dériver les fonctions suivantes

a) $f(x)=4x+1$ — $D_f=\mathbb{R}$

b) $f(x)=5x^2-3x+2$ — $D_f=\mathbb{R}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{8}$ — $D_f=\mathbb{R}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+6x-4$ — $D_f=\mathbb{R}$

e) $f(x)=3x^4+5x^3-2x^2-x+1$ — $D_f=\mathbb{R}$

f) $f(x)=(3x+2)(-4x+1)$ — $D_f=\mathbb{R}$

g) $f(x)=(-3x+2)^2$ — $D_f=\mathbb{R}$

h) $f(x)=\dfrac{5}{x}$ — $D_f=]0;+\infty[$

i) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ — $D_f=]-\infty;0[$

j) $f(x)=-\dfrac{3}{x^2}$ — $D_f=]0;+\infty[$

k) $f(x)=\dfrac{4}{x+1}$ — $D_f=]-1;+\infty[$

l) $f(x)=x^2+1+\dfrac{4}{x+1}$ — $D_f=]-1;+\infty[$

m) $f(x)=\dfrac{2x-5}{-x+3}$ — $D_f=]3;+\infty[$

n) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ — $D_f=\mathbb{R}$

o) $g(t)=\sin 2t$ — $D_f=\mathbb{R}$

p) $g(t)=\sin\left(3t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ — $D_f=\mathbb{R}$

q) $g(t)=\cos 3t$ — $D_f=\mathbb{R}$

r) $g(t)=\cos(-3t+\pi)$ — $D_f=\mathbb{R}$

s) $h(z)=(3z-1)\sqrt{z}$ — $D_f=]0;+\infty[$

t) $h(t)=\left(\dfrac{3x-4}{x-1}\right)^3$ — $D_f=]1;+\infty[$

u) $f(x)=\sqrt{x^2+5x+7}$ — $D_f=\mathbb{R}$

v) $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ — $D_f=]0;+\infty[$

Exercice 2 :

Ecrire pour chaque fonction l'équation de la tangente au point d'abscisse

a) $f(x)=x^3-2x^2+x+1$, $a=-2$

b) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+4}$, $a=0,5$

Réponses

Exercice 1 :

a) $f'(x)=4$

b) $f'(x)=10x-3$

c) $f'(x)=\dfrac{2x}{3}+\dfrac{1}{4}$

d) $f'(x)=x^2-x+6$

e) $f'(x)=12x^3+15x^2-4x-1$

f) $f'(x)=-24x-5$

g) $f'(x)=18x-12$

h) $f'(x)=-\dfrac{5}{x^2}$

i) $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$

j) $f'(x)=\dfrac{6}{x^3}$

k) $f'(x)=-\dfrac{4}{(x+1)^2}$

k) $f'(x)=2x-\dfrac{4}{(x+1)^2}$

m) $f'(x)=\dfrac{1}{(-x+3)^2}$

n) $f'(x)=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

o) $g'(t)=2\cos 2t$

p) $g'(t)=3\cos\left(3t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

q) $g'(t)=-3\sin(3t)$

r) $g'(t)=3\sin(-3t+\pi)$

s) $h'(z)=\dfrac{9z-1}{2\sqrt{z}}$

t) $h'(t)=3\left(\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)\left(\dfrac{3x-4}{x-1}\right)^2=\dfrac{3(3x-4)^2}{(x-1)^3}$

u) $f'(x)=\dfrac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x+7}}$

v) $f'(x)=\dfrac{\pi}{x^2}\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

Exercice 2 :

a) T a pour équation $y=21x+25$

b) T a pour équation $y=\dfrac{44}{81}x-\dfrac{58}{81}$

Etape 4. Limites de fonctions

4.1. *L'essentiel*

- **Notation et vocabulaire**

  $\lim\limits_{n\to a} f(x) = L$ signifie : la limite de $f(x)$ quand x tend vers a est L.

- **Limites à l'infini**
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

  Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right) = 2$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-a}\right) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{(x-a)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-a)^2} = 0$

  - $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

  Exemples : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^3\right) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3\right) = +\infty$

- **Limites en une valeur définie**

Soit a un réel.

- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} \frac{1}{x-a} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} \frac{1}{x-a} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty$

- **Opérations sur les limites**

Les fonctions f et g ont le même ensemble de définition.
a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et l, l' sont des réels.

f a pour limite en a	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
g a pour limite en a	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$ a pour limite en a	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***FI***	$-\infty$

f a pour limite en a	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
g a pour limite en a	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
$f\times g$ a pour limite en a	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***FI***

Exemples : Attention, aux formes indéterminées :

- $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $g(x) = x^2$; $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x) = 1$
- $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = x^2$; $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x) = +\infty$
- $f(x) = \frac{\cos x}{x}$; $g(x) = x$; $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ $\quad f\times g$ n'a pas de limite

f a pour limite en *a*	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
g a pour limite en *a*	$l' \neq 0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
$\dfrac{f}{g}$ a pour limite en *a*	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***FI***

f a pour limite en *a*	$l>0$ *ou* $+\infty$	$l<0$ *ou* $-\infty$	$l>0$ *ou* $+\infty$	$l<0$ *ou* $-\infty$	*0*
g a pour limite en *a*	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
$\dfrac{f}{g}$ a pour limite en *a*	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***FI***

Méthodes :

- Etude d'une limite d'un polynôme

Pour étudier la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'un polynôme, on met en facteur le terme de plus haut degré.

Exemple : étude de la limite en $+\infty$ de $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ donc ***FI***. On ne peut pas conclure directement.

On réécrit *f* : $f(x)=x^3\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=1$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- Etude d'une limite d'une fonction rationnelle

Pour étudier la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fraction rationnelle, on factorise le numérateur et le dénominateur par leur terme de plus haut degré.

Exemple : étude de la limite en $+\infty$ et en 3 de $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x-3}$ définie sur $]3;+\infty[$.

- En $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x-3=+\infty$ donc ***FI***. On ne peut pas conclure directement.

On réécrit $f(x)=\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}=\dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- En 3, avec $x>3$

$\lim\limits_{x\to3} x^2+2x=15$ et $\lim\limits_{x\to3} x-3=0$,

Or $x-3>0$ sur l'intervalle, donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} x-3=0^+$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- **<u>Limite de la composée de deux fonctions</u>**

  Soient *a*, *b*, *c* des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$, et *f* et *g* deux fonctions.

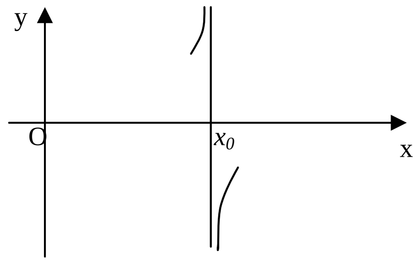
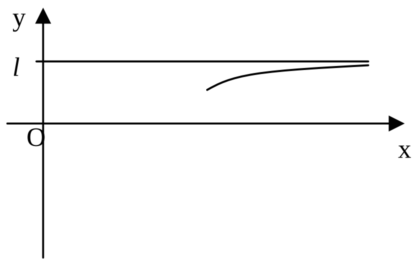
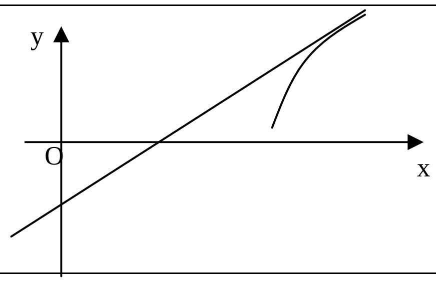
  Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$

  <u>Exemple :</u> étude de la limite en $+\infty$ de $h(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

  On pose $f(x) = \frac{1}{x}$. $g(X) = \cos X$. $h(x) = (g \circ f)(x)$

  Or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{X \to 0} g(X) = 1$. donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (g \circ f)(x) = 1$

- **<u>Conséquences graphiques : Les asymptotes</u>**

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ La droite d'équation $x=x_0$ est la **droite asymptote à la courbe**. Le signe de la limite infinie détermine la position de la courbe	
$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ ou -\infty}} f(x) = l$ avec $l \in IR$ La droite d'équation $y=l$ est la **droite asymptote à la courbe**. Le signe de $f(x)-l$ détermine la position de la courbe	
$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ ou -\infty}} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$ La droite d'équation $y=ax+b$ est la **droite asymptote à la courbe**. Le signe de $f(x)-(ax+b)$ détermine la position de la courbe	

4.2. Exercices de l'étape 4

Exercice 1 :

Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude I.

1) $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 1$ I = $\mathbb{R}$
2) $f(x) = -x^4 + 3x + 1$ I = $\mathbb{R}$
3) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ $I =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$
4) $f(x) = \dfrac{-x+1}{x+3}$ $I =]-\infty;-3[$
5) $f(x) = \dfrac{-3x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2}$ $I =]2;+\infty[$
6) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x-1}$ $I =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$
7) $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{4}{2-x}$ $I =]-\infty;-2[$
8) $f(x) = -2x^2 + x - \dfrac{1}{x}$ $I =]0;+\infty[$
9) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - 2x$ I = $\mathbb{R}$ (On utilisera l'expression conjuguée si nécessaire)

Exercice 2 :

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{4x^3 - 3x}{(2x-1)^2}$ sur $D = \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Vérifier que pour tout x de D, $f(x) = x + 1 - \dfrac{1}{(2x-1)^2}$
2) Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   Que déduit-on graphiquement de la première limite ?
3) Déduire de 1) l'équation de l'asymptote oblique $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$, puis étudier la position relative de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exercice 3 :

Soit f une fonction définie par $f(t) = \dfrac{t^3 - 4t^2 + 8t - 4}{(t-1)^2}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Etudier la limite de f en 2. En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{V}$ dont on donnera une équation.
3) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   Déterminer a, b, c, et d pour que $f(t) = at + b + \dfrac{ct+d}{(t-1)^2}$. En déduire l'existence d'une asymptote oblique $\mathscr{A}$ dont on précisera l'équation et sa position par rapport à la courbe.

Etape 5. Etude d'une fonction

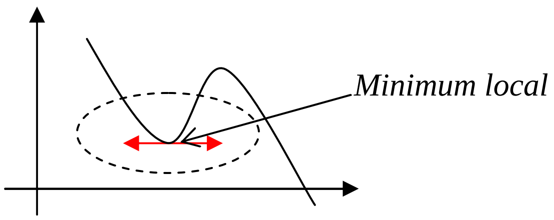
5.1. L'essentiel

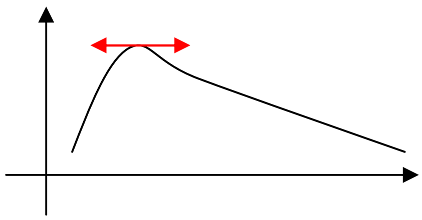
- **Sens de variation**

Si pour tout réel *x* de I	**Alors**
f'(x)=0	*f* est constante sur I
f'(x)>0	*f* est strictement croissante sur I
f'(x)<0	*f* est strictement décroissante sur I

- **Extremum**

Si *f* est dérivable sur l'intervalle I et admet un maximum local (ou un minimum local) en un point *a* distinct des extrémités de I, alors *f'*(*a*)=0.





- **Etude et Représentation graphique d'une fonction**

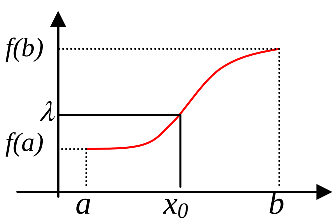
Pour Etudier une fonction et construire sa représentation graphique, on procède généralement de la manière suivante:

- Limites aux bornes de l'intervalle d'étude
- Etude des variations :
  - Dérivée
  - Signe de la dérivée
  - Tableau de variation
- Le plan étant muni d'un repère orthogonal ou orthonormal, on dessine la courbe représentative après avoir placé :
  - Les éventuels points représentatifs des extremums
  - Des points ou des droites particuliers
  - Quelques points obtenus à l'aide d'une calculatrice

Exemple : Etudier et représenter sur [-5 ;5] $f(x)=\frac{2x^3}{3}+x^2-12x+1$

Théorème des valeurs intermédiaires :

Si *f* est une fonction continue sur sur [*a*, *b*], alors pour tout réel *k* compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel *c* compris entre *a* et *b* tel que $f(c)=k$.



Théorème « de bijection » Si *f* est une fonction dérivable et strictement monotone sur [*a*, *b*], alors pour tout élément λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=\lambda$ admet une solution unique dans [*a*, *b*].

5.2. Exercices de l'étape 5

Exercice 1 :

f est la fonction définie sur IR par : $f(x)=x^4-6x^2-8x$

a) Etudier la limite de *f* en $-\infty$ et $+\infty$
b) Déterminer la donction dérivée de *f* et démontrer que $f'(x)=4(x-2)(x+1)^2$
c) Etudier le signe de $f'(x)$. En déduire dans un tableau les variations de *f*.

Exercice 2 :

Etudier la fonction *f* définie sur IR par $f(x)=x^3+2x^2-3$

Exercice 3 :

Etudier la fonction *f* définie sur IR par $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+3}$

Exercice 4 :

Etudier la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{x}$

Exercice 5 :

F est la fonction définie sur IR – {1} par : $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{2(x-1)^2}$.

Déterminer les réels *a* et *b* pour que la fonction *f* admette un extremum égal à 2 en *x*=2.

Exercice 6:

1) Etudier la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x+1$

Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle]-1,0[. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de cette solution.

Exercice 6 :

Soit *f* une fonction définie par $f(t)=\dfrac{t^3-4t^2+8t-4}{(t-1)^2}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 1 cm. On étudiera *f* sur I=$[-3;6]$, mais on s'intéressera aussi au comportement de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$.

1) Sur I, Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
2) Etudier la limite de *f* en 2. En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{V}$ dont on donnera une équation.
3) Déterminer les limites de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$.

   Déterminer *a*, *b*, *c*, et *d* pour que $f(t)=at+b+\dfrac{ct+d}{(t-1)^2}$. En déduire l'existence d'une asymptote oblique $\mathscr{A}$ dont on précisera l'équation et sa position par rapport à la courbe.
4) Calculer $f'(t)$. On démontrera que $f'(t)=\dfrac{t^2(t-3)}{(t-1)^3}$.
5) Etudier le signe de f'. En déduire les variations de *f* sur I.
6) Déterminer le point d'intersection J de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{A}$. O, admettra que les coordonnées de J sont : $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{-47}{12}\right)$ Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point.

Tracer $\mathscr{A}$, $\mathscr{V}$ et $\mathscr{C}$ sur I.

Etape 6. La fonction exponentielle

6.1. L'essentiel

- **Notation :** $\exp(x) = e^x$
- Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$

- $e^0 = 1$ $\quad e^1 = e$

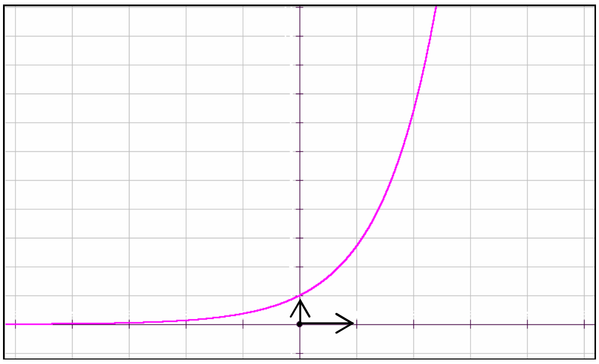
- $e^{a+b} = e^a \times e^b$ $\quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ $\quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ $\quad \left(e^a\right)^n = e^{na}$

- **Dérivée :** $\left(e^x\right)' = e^x$ $\quad \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$ $\quad \left[\left(e^u\right)' = u' \times e^u\right]$

- **Limites :** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

- **Variations et courbe représentative**

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$+$
e^x	$0 \nearrow +\infty$



- Théorèmes admis : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\quad n > 0$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ $\quad \left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$

6.2. Exercices de l’étape 6

Exercice 1 :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} -1+e^{x}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} -1+e^{x}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 3+e^{-t}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} 3+e^{-t}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2t}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2t}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2-e^{x}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^{x}-x}{x^2}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{\sqrt{x}}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{3x-4}$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{3x-4}$

Exercice 2 :

Déterminer les dérivées de la fonction *f* sur l’ensemble donné où elle est définie dérivable.

a) $f(x)=x+e^{x}$	$D_f=\mathbb{R}$	b) $f(t)=e^{0,2t}$	$D_f=\mathbb{R}$
b) $f(x)=2x-e^{-3x}$	$D_f=\mathbb{R}$	d) $f(x)=e^{3x+5}$	$D_f=\mathbb{R}$
e) $f(x)=x^2e^{x}$	$D_f=\mathbb{R}$	f) $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}}$	$D_f=\mathbb{R}$
g) $f(x)=2^{x}$	$D_f=\mathbb{R}$	h) $f(x)=(3x-2)e^{x}$	$D_f=\mathbb{R}$
i) $f(x)=\dfrac{2e^{x}}{e^{x}-1}$	$D_f=\mathbb{R}$	j) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$	$D_f=\mathbb{R}^*$
k) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$	$D_f=\left]0;+\infty\right[$	l) $f(x)=e^{\frac{3x+1}{x-1}}$	$D_f=\left]1;+\infty\right[$

Exercice 3 :

Etudier la fonction *f* sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x+e^{x}$

Exercice 4 :

Etudier la fonction *f* sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=3000e^{-\frac{x}{200}}$

Exercice 5 :

Etudier la fonction *f* sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=e^{-x^2}$

Exercice 6 :

Etudier la fonction *f* sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=e^{x^2+x}$

Exercice 7 :

Etudier la fonction *f* sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x-\dfrac{1}{2}+e^{-x}$

Etape 7. La Fonction logarithme

7.1. L’essentiel.

- La fonction **logarithme népérien** $f(x) = \ln x$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui prend la valeur 0 pour $x=1$.
- Dérivée : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\qquad (\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ $\qquad \left[(\ln u)' = \frac{u'}{u}\right]$
- $\ln 1 = 0$ $\qquad \ln e = 1$ $\qquad \ln e^n = n$
- Pour tout x de $]1;+\infty[$, $\ln x > 0$

  Pour tout x de $]0;1[$, $\ln x < 0$

- **Relations fonctionnelles** $\qquad \ln ab = \ln a + \ln b$ $\qquad \ln \frac{1}{a} = -\ln a$

  $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ $\qquad \ln a^n = n \ln a$ $\qquad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

- **Equivalences**

  $\ln a = \ln b$ ssi $a = b$.

  $\ln a \le \ln b$ ssi $a \le b$

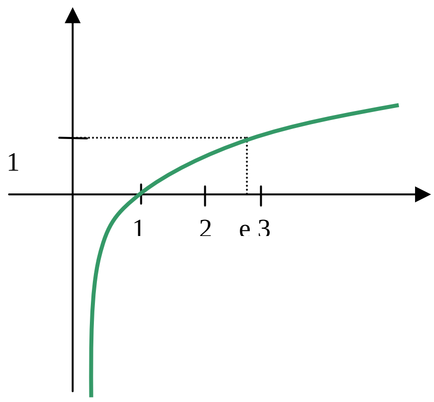
  $\ln a \ge \ln b$ ssi $a \ge b$

- **Limites**

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

- **Variation – Courbe représentative.**

x	0	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	||	+
$\ln x$	|| $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

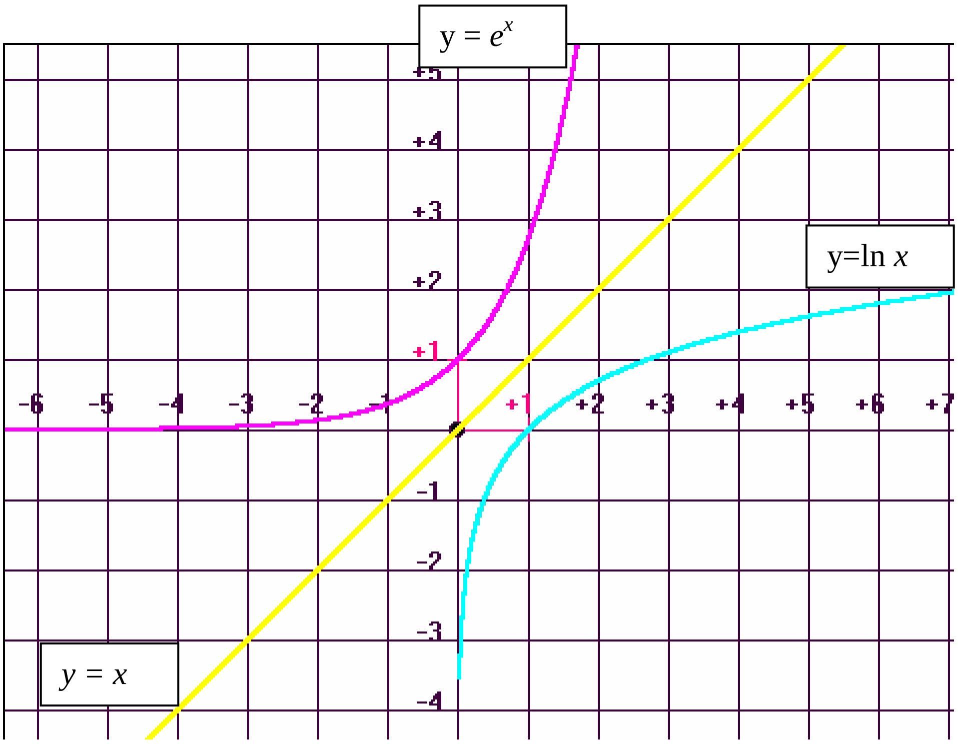


- **logarithme népérien & exponentielle : Fonctions réciproques**

- Pour tout nombre réel x, $\ln e^x = x$
- Pour tout nombre réel de $]0;+\infty[$, $e^{\ln x} = x$

- la fonction exponentielle est la fonction qui à tout nombre réel x associe le nombre strictement positif unique y tel que $x = \ln y$.
- **Pour tout nombre réel x et tout nombre réel strictement positif y, $y = e^x$ ssi $x = \ln y$**

Les courbes représentatives des fonctions exp et ln se déduisent l'une de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$.



x	-3	-2	-1
$f(x)$			

x	0	1	2
$f(x)$			

Remarque :
La courbe exponentielle admet pour asymptote l'axe des abscisses, ce qui est l'interprétation de $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

7.2. Exercices de l'étape 7

Exercice 1 : Simplifier

a) $\ln e^{-1}$ b) $\ln e^{2}$ c) $\ln\sqrt{e}$ d) $\ln\frac{1}{\sqrt{e}}$ e) e^{0} f) $e^{\ln 2}$

g) $e^{-\ln 3}$ h) $e^{2\ln 2}$ i) $\ln e^{2t}$ j) $e^{1+\ln 2}$

Exercice 2 : Résoudre après avoir déterminé leur ensemble de définition les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln x = \ln 3$ b) $\ln x = 2\ln 3$ c) $\ln x = 0$ d) $\ln x = 1$ e) $\ln x = 4$

f) $\ln x \le \ln 2$ g) $\ln x \le 0$ h) $\ln x \le 2\ln 3$ i) $\ln x \le 2$

j) $\ln(x+3)+\ln(x+5)=\ln 15$. k) $\ln x - \ln(x-5) = \ln 3$ l) $\frac{1}{2}\ln(x+1)=\ln 5$

m) $\ln(x+3)<0$ n) $\ln(2x)>\ln(x+1)$ o) $e^{x}=4$ p) $e^{x}+2=0$ q) $(1{,}2)^{x}=2$

r) $(1{,}06)^{t}=2$ s) $e^{x}\ge 3$ t) $e^{t}\ge -1$ u) $e^{2x}\ge 5$ v) $e^{-3x}\ge 1$

Exercice 3

Calculer la dérivée première de chaque fonction suivante, après avoir précisé l'ensemble de définition.

1) $f(x)=3\ln x + x$ D$_f$ = $]0;+\infty[$

2) $f(x)=(2x-1)\ln(x+2)$ D$_f$ =

3) $f(x)=\ln\left(\frac{3x+2}{x+1}\right)$ D$_f$ =

4) $f(x)=\ln(x^{3})$ D$_f$ =

5) $f(x)=\ln\left(\sqrt{1-2x}\right)$ D$_f$ =

6) $f(x)=\ln(\ln(x))$ D$_f$ =

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x^{2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{2}}$ 3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(3x^{2}-\ln x\right)$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2\ln x - x)$ 5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(2x^{2}\ln x - 5x^{2}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(2x^{2}\ln x - 5x^{2}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(x^{2}+x+1\right)$ 8) $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln\left(x^{2}+x+1\right)$ 9) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Exercice 5 :

Etudier la fonction *f* sur $]0;+\infty[$ définie par $f(x)=(\ln x)^{2}-\ln x$

Exercice 6 :

Etudier la fonction *f* sur $]0;+\infty[$ définie par $f(x)=x-1+\frac{1}{2}\ln x$

Exercice 7 :

Etudier la fonction *f* sur $]-3;3[$ définie par $f(x)=\ln\frac{3+x}{3-x}$

Etape 8. Croissance comparée des fonctions

- **Fonction exponentielle de base *a* (fonctions puissances)**

  Pour tout nombre $a>0$ $\quad a^x = e^{x\ln a}$

  Pour tous nombres strictement positifs *a* et *a'*, pour tous nombres réels *b*, *c* : $a^b > 0$

$$a^{b+c} = a^b \times a^c \qquad (aa')^b = a^b \times a'^b$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b} \qquad \left(\frac{1}{a}\right)^b = \frac{1}{a^b}$$

$$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c} \qquad \left(\frac{a}{a'}\right)^b = \frac{a^b}{a'^b}$$

$$\left(a^b\right)^c = a^{bc} \qquad \ln a^b = b\ln a$$

- <u>**Sens de variation – courbe représentative de**</u> <u>$f(x) = a^x$</u>

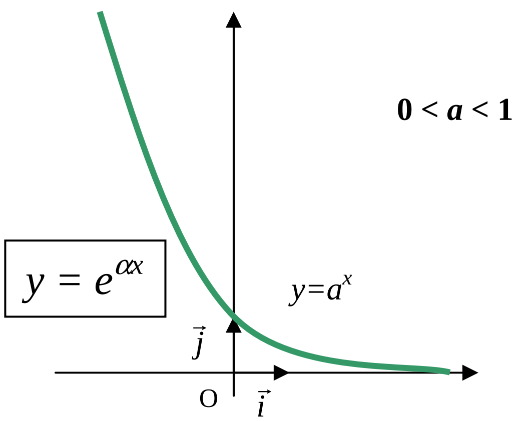
Soit *a* un nombre réel strictement positif, fixé.

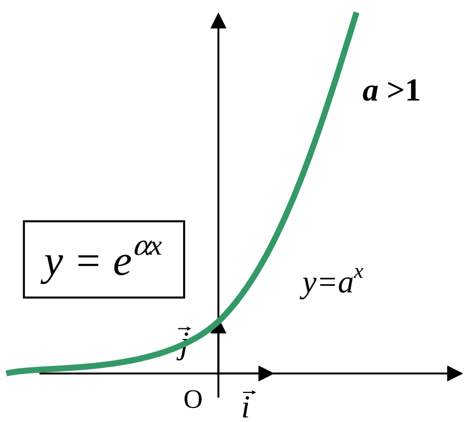
0 < *a* < 1

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)=a^x$	$+\infty$ ↘	0

***a* >1**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)=a^x$	0 ↗	$+\infty$





<u>Remarque :</u> En posant $\ln a = \alpha$, les deux conditions deviennent

0 < *a* < 1 $\quad$ **$\alpha < 0$**

***a* >1** $\quad$ **$\alpha > 0$**

On observe alors graphiquement le comportement de $e^{\alpha x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$:

Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\alpha x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\alpha x} = +\infty$

Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\alpha x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\alpha x} = 0$

Fonctions. $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ avec *n* entier naturel non nul.

Définition :

- Soit n un nombre entier naturel non nul.

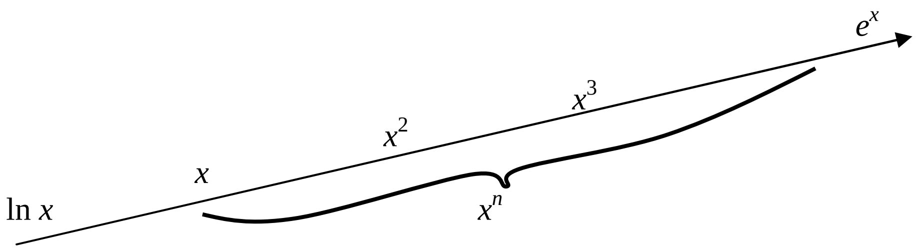
La fonction racine $n^{\text{ième}}$ est la fonction qui à tout nombre x de $[0;+\infty[$ associe le nombre unique y de $[0;+\infty[$ tel que $y^n = x$.

La fonction est définie par : $f : x \mapsto = \sqrt[n]{x}$

- Pour tout nombre entier naturel non nul n, pour tous nombres x et y de $[0;+\infty[$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ si et seulement si $y^n = x$

Croissance comparée des fonctions $x \mapsto \exp x$, $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \ln x$ en $+\infty$



Etape 9. Primitives

9.1. L'essentiel

- Une fonction F définie sur I est **une primitive** de f sur I lorsqu'elle est dérivable sur I et que F' = f.
- Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I.
- Les primitives de f sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto F(x) + C$ où C est une constante réelle.

- **Primitives des fonctions usuelles**

f(x)	*F(x)*	**Intervalle de validité**
a	$ax+C$	IR
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	IR
x^n n nombre **entier positif ou négatif** différent de –1.	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	IR si $n>0$ $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ si $n \leq 0$ et $n \neq -1$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	$]0;+\infty[$
e^x	$e^x + C$	IR
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x + C$	IR
$\cos x$	$\sin x + C$	IR
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	IR

- **Primitives d'une fonction composée**

f(x)	*F(x)*	Intervalle de validité
$f(x)=u(x)^n\cdot u'(x)$ $avec\ \ n\neq -1$	$F(x)=\dfrac{[u(x)]^{n+1}}{n+1}+C$	I
$f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)^n}$ $avec\ \ n\neq 1$	$F(x)=-\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{[u(x)]^{n-1}}+C$	I $(u(x)\neq 0$ sur I)
$f=\dfrac{u'}{u^2}$	$F=-\dfrac{1}{u}+C$	I $(u(x)\neq 0$ sur I)
$f=\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F=2\sqrt{u}+C$	I $(u(x)>0$ sur I)
$f=\dfrac{u'}{u}$	$F=\ln\lvert u\rvert+C$ $F=\ln u+C$	I Si $u(x)>0$ sur I
$f=u'e^u$	$F=e^u+C$	I $(u(x)>0$ sur I)
sin$(ax+b)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+C$	I
cos$(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)+C$	I

9.2. Exercices associés à l'étape 9

Exercice 1 : déterminer les primitives des fonctions suivantes

a) $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 6x - 5$ D=$\mathbb{R}$

b) $f(x) = -\frac{5}{x^3}$ D= $]0;+\infty[$

c) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}$ D= $]0;+\infty[$

d) $f(x) = 2x^2(x^3 + 1)$ D=$\mathbb{R}$

e) $f(x) = \frac{6x}{(3x^2 - 1)^2}$ D= $\left]\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right[$

f) $f(x) = \frac{4x - 5}{\sqrt{2x^2 - 5x}}$ D= $\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

g) $f(x) = 2\sin x - \cos x$ D=$\mathbb{R}$

h) $f(x) = -3\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ D=$\mathbb{R}$

i) $f(x) = \frac{2}{x}$ D= $]0;+\infty[$

j) $f(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x}$ D= $]-\infty;0[$

k) $f(x) = \frac{3}{x + 2}$ D= $]-2;+\infty[$

l) $f(x) = \frac{1}{2x + 2}$ D= $]-1;+\infty[$

m) $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$ D= $]0;+\infty[$

n) $f(x) = x + e^x$ D=$\mathbb{R}$

o) $f(t) = 3e^{3t+1}$ D=$\mathbb{R}$

p) $f(x) = 2x^3 - e^{-3x}$ D=$\mathbb{R}$

q) $f(t) = e^{3t+5}$ D=$\mathbb{R}$

Etape 10. Calcul intégral

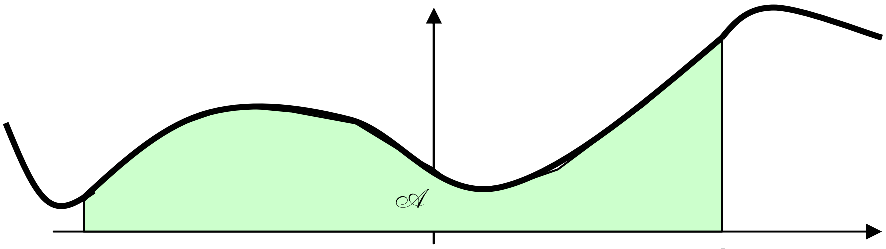
10.1. L'essentiel.

- Soient f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b deux éléments de I.

  On appelle ***intégrale*** de a *à* b *de* f le nombre réel : $\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

- Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors $g'(x) = f(x)$

- **Interprétation graphique de l'intégrale dans le cas d'une fonction de signe constant**
  - Soit f une fonction **continue et positive sur un intervalle** *[a, b]*.
    L'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan constituée de l'ensemble des points M de coordonnées x *et* y telles que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ est : $\mathscr{A} = \int_a^b f(x)dx$



Remarque

L'aire $\mathscr{A}$ considérée dans ce théorème est exprimée en *unités d'aire*. Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'unité d'aire est l'aire du carré défini par les vecteurs unitaires $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ du repère.
Si sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées l'unité choisie est 1 cm, alors l'unité d'aire est 1 cm^2, si l'unité choisie sur chaque axe de coordonnée est 2 cm, alors l'unité d'aire est 4 cm^2.

  - Soit f une fonction **continue et négative sur un intervalle** *[a, b]*.
    L'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan constituée de l'ensemble des points M de coordonnées x *et* y telles que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq 0$ est : $\mathscr{A} = -\int_a^b f(x)dx$

- **Premières propriétés :** $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ $\qquad \int_a^a f(t)dt = 0$

- **Relation de Chasles :** $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

- **Linéarité :** $\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$ $\qquad \int_a^b (\alpha f(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$

- **Valeur moyenne de *f* sur $[a;b]$:** $\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t)$

- **Techniques de calcul- exemples**

Utilisation du tableau de primitive

Calculer

$F = \int_0^2 \left(2t^2 - t + 4\right)dt$

Linéarisation de polynômes trigonométriques

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \cos t \cos 2t$

1) Linéariser à l'aide des formules d'Euler
2) Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près, de l'intégrale : $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$

Réécriture d'une fonction

On se propose de calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{2x^2 + x + 1}{x+3}dx$

1) Déterminer trois constantes réelles *a*, *b*, *c* telles que , pour tout *x* de $[0;1]$,

   $\frac{2x^2 + x + 1}{x+3} = ax + b + \frac{c}{x+3}$

2) Après avoir justifié que la fonction $x \mapsto \frac{2x^2 + x + 1}{x+3}$ est continue sur $[0;1]$, calculer la valeur exacte de l'intégrale J.

Cas particuliers

- **Si *f* paire** $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$

- **Si *f* impaire** $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

- **Si *f* périodique de période T** $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

10.2. Exercices associés à l'étape 10

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes

a) $f(x)=-4x^3+2x^2-6x-5$ D=$\mathbb{R}$ $I=\int_{-2}^{3} f(x)dx$

b) $f(x)=-\dfrac{5}{x^3}$ D= $]0;+\infty[$ $I=\int_{1}^{3} f(x)dx$

c) $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x}}$ D= $]0;+\infty[$ $I=\int_{2}^{5} f(x)dx$

d) $f(x)=2x^2(x^3+1)$ D=$\mathbb{R}$ $I=\int_{-1}^{2,5} f(x)dx$

e) $f(x)=\dfrac{6x}{(3x^2-1)^2}$ D= $\left]\dfrac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right[$ $I=\int_{0,75}^{2} f(x)dx$

f) $f(x)=\dfrac{4x-5}{\sqrt{2x^2-5x}}$ D= $\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$ $I=\int_{3}^{5} f(x)dx$

g) $f(x)=2\sin x-\cos x$ D=$\mathbb{R}$ $I=\int_{-\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$

h) $f(x)=-3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{5}\right)$ D=$\mathbb{R}$ $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{5}} f(x)dx$

Exercice 2 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm. On note C la courbe représentative de *f*.

1) Etudier la fonction *f*.
2) Déterminer les réels *a*, *b*, *c* tels que la fonction F définie par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.
3) α est un réel positif. Calculer en cm² l'aire notée $A(\alpha)$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation respectives $x=0$ et $x=\alpha$.