NSI 1ère - Données

Complément à deux

qkzk

Le complément à deux : comment coder les entiers négatifs dans une machine ?

Les entiers relatifs

Rappels :

- **Entiers naturels :** entiers positifs ou nuls (0, 1, 2 etc.)
- **Entiers relatifs :** entiers de n'importe quel signe (. . . , -2, -1, 0, 1,. . .)

Les entiers relatifs

Le problème du signe :

Un signe n'est pas un nombre...
On ne peut pas l'encoder directement en binaire.

Le principe est d'attribuer au *bit de poids fort* (premier bit) le signe du nombre.

- Si le *bit de poids* fort est $\mathbf{0}$, le nombre est **positif**,
- Si le *bit de poids* fort est $\mathbf{1}$, le nombre est **négatif**.

Nombres encodés sur un octet

Contrainte immédiate :

Il faut que la machine sache quelle est la taille du nombre !

Sinon :

- Comment déterminer “le bit de poids fort” ?
- Comment savoir où s’arrête le nombre ?

Durant tout le chapitre, on encodera **nos nombres entiers sur 8 bits.**

Approche naïve : binaire signé

Essayons avec cette simple règle :

Pour encoder un entier sur 8 bits,

- On détermine la représentation binaire de sa valeur absolue
- Ensuite on remplit de 0 à gauche.

Signe

- Si le nombre est positif, on garde le bit de poids fort à 0,
- **Sinon, on met le bit de poids fort à 1.**

Approche naïve : binaire signé

27

```
27 = 0b11011

On complète sur 8 bits :
27 = 0b 0001 1011

27 > 0 on garde le premier bit à 0
```

Approche naïve : binaire signé

-9

```
La valeur absolue de -9 est 9.

9 = 0b1001

On complète sur 8 bits :
9 = 0b 0000 1001
-9 < 0 on remplace le premier bit par -1 :

-9 = 0b 1000 1001
```

Jusqu'ici tout va bien...

Et soudain, c'est le drame...

Essayons d'ajouter ces exemples :

Vérifions que $27 + (-9) = 18$

```
  0b 0001 1011
+ 0b 1000 1001
--------------
= 0b 1010 0100
```

... mais `0b 1010 0100 = -36` en binaire signé...

Échec total ! **Le binaire signé ne permet pas de réaliser les additions habitulles**

Exercice 1

On suppose toujours nos entiers encodés sur un octet.

1. Donner la représentation binaire naïve de 12, de -100 et de -88.
2. Réaliser l'addition binaire bit à bit $12 + (-100)$.
3. Comparer avec le résultat obtenu.

La méthode naïve ne permet pas de faire de calculs !

Avec la méthode naïve, **on ne peut plus réaliser d'opération naturelle sur les entiers**. On a maintenant deux objectifs :

1. Représenter les entiers relatifs,
2. Conserver le même algorithme pour l'addition

Le complément à deux

Complètement à deux : entiers positifs

Pour les entier positifs

1. coder l'entier en binaire comme d'habitude,
2. compléter l'octet avec des 0 devant.

Complément à deux : entiers négatifs

Pour les entiers négatifs

1. Coder la valeur absolue du nombre en base 2,
2. compléter l'octet avec des 0 devant,
3. échanger tous les bits ($1 \leftrightarrow 0$),
4. ajouter 1.

Signe du complément à deux

- Si le bit de poids fort est 0 : le nombre est positif
- Si le bit de poids fort est 1 : le nombre est négatif

Exemple 1 : 27

27

1. `coder l’entier en binaire comme d’habitude,`
   `27 = 0b11011`
2. `compléter l’octet avec des 0 devant.`
   `27 = 0b 0001 1011`

Le complément à 2 sur un octet de 27 est `0b 0001 1011`

Exemple 2 : -9

-9

1. coder la valeur absolue du nombre :
   `9 = 0b1001`
2. compléter l'octet :
   `0b 0000 1001`
3. échanger tous les bits :
   `0b 1111 0110`
4. ajouter 1 :
   `0b 1111 0111`

Le complément à 2 sur un octet de -9 est `0b 1111 0111`

Complément à 2, méthode rapide

Méthode rapide

La méthode précédente se code facilement, elle est plus pénible à la main.

La méthode rapide : complément à 2 sur un octet de n :

Si l'entier est négatif :

1. *donner la représentation binaire de* $|n|$
2. *Compléter à gauche jusqu'à avoir la taille voulue*
3. *de droite à gauche, conserver tous les bits jusqu'au premier 1 inclus*
4. *changer tous les bits à gauche*

Méthode rapide : exemple

$n = -108$

Valeur absolue :

$|n| = 108 = 64 + 32 + 8 + 4$

Représentation binaire :

$|n| = 108 =$ `0b110 1100`

Compléter :

$|n| = 108 =$ `0b0110 1100`

Changer conserver les 0 à droite jusqu'au premier 1 inclus, changer tous les bits à gauche.

$n = -108 =$ `0b1001 0100`

Exercice 2

Donner les compléments de à 2 sur un octet de 12, -100 et de -88.

Vérifions : $27 + (-9)$

Vérifions : $27 + (-9) = 18$

```
  0001 1011
+ 1111 0111
-----------
= 0001 0010
```

On vérifie immédiatement que `18 = 0b10010`

Remarque la dernière retenue (tout à gauche) disparait.

Exercice 3

1. Réaliser l'addition binaire des compléments à 2 des nombres 12 et -100.
2. Vérifier qu'on retrouve bien le résultat précédent pour -88.

Complément à deux vers décimal

Si l'entier est positif (son premier bit est 0)...

On fait comme d'habitude !

Exemple : `0b 0001 1011`

$1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 8 + 1 \times 16 = 27$

Du complément à deux vers le décimal

Si l'entier est négatif (si premier bit est 1)

1. Échanger tous les bits $0 \leftrightarrow 1$,
2. Ajouter 1,
3. Convertir en décimal normalement,
4. Changer le signe.

Exemple : `0b 1111 0111`

Exemple : `0b 1111 0111`

1. `On échange tous les bits,`
   `0b 0000 1000`
2. `On ajoute 1,`
   `0b 0000 1001`
3. `On converti en binaire comme d'habitude,`
   `0b 1001 = 1 * 1 + 1 * 8 = 9`
4. `On change le signe.`
   `0b 1111 0111 = -9`

Du complément à 2 vers le décimal, méthode rapide.

1. Conserver tous les bits à 0 droite jusqu'au premier 1 inclus,
2. Échanger tous les bits à gauche de ce 1,
3. Convertir en décimal normalement,
4. Changer le signe,

Du complément à 2 vers le décimal, méthode rapide : exemple

On part de $n =$ `0b 1010 1000`, en complément à 2 sur 8 bits,

1. Conserver tous les bits à 0 droite jusqu'au premier 1 inclus,
2. Échanger tous les bits à gauche de ce 1,
   `0b 0101 1000`
3. Convertir en décimal normalement,
   `0b 0101 1000` $= 8 + 16 + 64 = 88$
4. Changer le signe :
   en complément à 2 sur un octet $n =$ `0b 1010 1000` $= -88$

Exercice 4

Donner les notations décimales des compléments à deux sur un octet suivants :

1. `0b1111 1111`
2. `0b1000 0000`
3. `0b0111 1111`
4. `0b1010 0011`

Table de valeurs

```
 bit
 de
signe
    0 1 1 1 1 1 1 1 =  127
    0      ...      =  ...
    0 0 0 0 0 0 1 0 =    2
    0 0 0 0 0 0 0 1 =    1
    0 0 0 0 0 0 0 0 =    0
    1 1 1 1 1 1 1 1 =   -1
    1 1 1 1 1 1 1 0 =   -2
    1      ...      =  ...
    1 0 0 0 0 0 0 1 = -127
    1 0 0 0 0 0 0 0 = -128
```

Combien d'entiers relatifs sur un octet ?

Règle

Sur 8 bits en complément à deux, on peut encoder de -128 à 127,

Combien d'entiers relatifs sur avec `n` bits ?

Règle

Sur un octet on peut encoder de -2^{n-1} à $2^{n-1} - 1$.

Complément à 2 : résumé

- On dispose d'une méthode permettant d'ajouter des entiers (et donc de faire les opérations habituelles. . .) qui fonctionne aussi avec les entiers *négatifs*.
- Cette méthode permet d'encoder les entiers de -2^{n-1} à $2^{n-1} - 1$
- La méthode rapide pour encoder un entier en complément à 2 sur un octet :
  - s'il est positif, on l'écrit en binaire et on complète l'octet avec des 0 à gauche,
  - s'il est négatif, on écrit sa valeur absolue en binaire qu'on complète à gauche,
  - on conserve tous les 0 à droite jusqu'au premier 1 inclus,
  - on inverse tous les bits à gauche de ce premier 1.

Python et le complément à 2.

Les opérations précédentes imposent de choisir une taille maximale pour les entiers : **codés sur un octet**

Dans Python les entiers ont une **taille arbitraire**, il ne peut afficher nativement le complément à deux.

```
>>> bin(12)
'0b1100'
>>> bin(-12)
'-0b1100'
```

Pour obtenir le complément à 2, il faut le programmer.

Pour ceux que ça intéresse j'ai un TP Colab qui montre différentes manières d'afficher le complément à deux dans Python.